

კლასიკური მექანიკა

პირველი ქართული გამოცემა

ჰერბერტ ბოლდსტეინი

ჩარლზ კული

ჯონ საფკო



ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
თბილისი 2009

ნიგნის თარგმანი დაფინანსდა საქართველოს მეცნიერებისა და განათლების სამინისტროს პროგრამით - „საუნივერსიტეტო სახელმძღვანელოების განვითარება“. ნიგნს გამოსაცემად ამზადებს ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტი.

ამჟამად წარმოგიდგენთ ნიგნის I-IV თავს. შეესება საბოლოო ვერსიამდე მოხდება ყოველკვირეულად.

© 2005 Pearson Education, Inc.

ქართული გამოცემის საავტორო უფლება
© ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ISBN 978-9941-9116-8-2

სარჩევანი

თავი 1	5
თავი 2	41
თავი 3	82
თავი 4	149

ელემენტარული ნისიბი

მატერიალურ სხეულთა მოძრაობას ჯერ კიდევ ფიზიკის ფუძემდებლები იკვლევდნენ. მათი ძალისხმევის შედეგად საკმაოდ მრავლისმომცველი დარგი, სახელწოდებით დინამიკა, იგივე ანალიტიკური მექანიკა (ან უბრალოდ მექანიკა) ჩამოყალიბდა. მე-20 საუკუნეში ახალი თეორიები (განსაკუთრებით კვანტური მექანიკა) ჩამოაყალიბეს, ხოლო ფიზიკის ამ დარგის სახელწოდებად „კლასიკური მექანიკა“ დარჩა. ჩვენ მიღებულ პრაქტიკას არ ვენინააღმდეგებით და კლასიკურ მექანიკაში ფარდობითობის სპეციალური თეორიიდან მიღებულ დარგებს გავაერთიანებთ. მოცემული სახელმძღვანელოს მიზანი კლასიკური მექანიკის სტრუქტურის გამოვლენა და მისი ყოველდღიურობაში გამოყენების მაგალითების შესწავლაა. მექანიკის საფუძველი ფუნდამენტური ფიზიკური ცნებებია, როგორებიცაა სივრცე, დრო, ერთდროულობა, მასა, ძალა და ა.შ. ამ სახელმძღვანელოში ხსენებულ ფიზიკურ ცნებებს კრიტიკულად არ გავაანალიზებთ და დავუშვებთ, რომ მათი მნიშვნელობები მკითხველისთვის თავისთავად ცხადია.

1.1 ნაწილაკის მექანიკა

ვთქვათ, \mathbf{r} არის ნაწილაკის რადიუს-ვექტორი რაიმე ათვის სათავიდან და \mathbf{v} მისი სიჩქარის ვექტორია:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (1.1)$$

ნაწილაკის \mathbf{p} იმპულსი წერტილის მასის და სიჩქარის ნამრავლია:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (1.2)$$

გარე საგნების და ველების არსებობის შედეგად ნაწილაკზე სხვადასხვა სახის ძალამ, მაგალითად მიზიდულობის ან ელექტროდინამიკურმა ძალამ შეიძლება იმოქმედოს. ნაწილაკზე მოქმედი ძალების ვექტორულ ჯამის \mathbf{F} ტოლქმედი ძალა ეწოდება. ნაწილაკის მექანიკას *ნიუტონის მოძრაობის მეორე კანონი* ასახავს. ამ კანონის თანახმად, არსებობენ ისეთი ათვის სისტემები, რომლებშიც ნაწილაკის მოძრაობას შემდეგი დიფერენციალური განტოლება აღწერს:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{p}}, \quad (1.3)$$

ახ

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \quad (1.4)$$

ნანილაკის მასა უმეტეს შემთხვევაში მუდმივია და 1.4 ფორმულა ასეთ სახეს იღებს:

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}, \quad (1.5)$$

სადაც \vec{a} არის ნანილაკის აჩქარების ვექტორი:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (1.6)$$

მაშასადამე, მოძრაობის განტოლება მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებაა, თუ დავუშვებთ, რომ \mathbf{F} ძალა მაღალი რიგის წარმოებულებზე დამოკიდებული არ არის.

ათვლის სისტემას, რომელშიც 1.3 ფორმულა ვარგისია, **ინერციული** ანუ **გალილეის სისტემა** ეწოდება. კლასიკურ მექანიკაშიც კი ინერციული სისტემის ცნება იდეალიზირებულია. პრაქტიკულად შესაძლებელია ისეთი კოორდინატთა სისტემის აგება, რომელსაც ჩვენთვის სასურველი თვისებები აქვს. ძალიან ხშირად, დედამიწასთან დაკავშირებული ათვლის სისტემა („ლაბორატორიულ სისტემას“) შეიძლება კარგი მიახლოებით ჩავთვალოთ ინერციულ სისტემად. მაშინ, როდესაც ზოგიერთი ასტრონომიული მიზნებისათვის ინერციული სისტემა შორეულ გალაქტიკებთან უნდა დავაკავშიროთ.

მექანიკასთან დაკავშირებული მნიშვნელოვანი დასკვნები მუდმივობის კანონების თეორემების საშუალებით გამოისახებიან, რომლებიც აღწერენ, რა პირობებშია ესა თუ ის მექანიკური სიდიდე დროში უცვლელი.

1.3 ფორმულა ამგვარი თეორემის კლასიკური მაგალითია.

ნანილაკის იმპულსის მუდმივობის კანონი: თუ ტოლქმედი \mathbf{F} ძალა ნულის ტოლია, მაშინ $\dot{\mathbf{p}} = 0$ და \mathbf{p} იმპულსი მუდმივია.

ნანილაკის კუთხური მომენტი O წერტილის გარშემო \mathbf{L} სიმბოლოთი გამოისახება და შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (1.7)$$

სადაც \mathbf{r} არის რადიუს-ვექტორი O -დან ნანილაკამდე გაითვალისწინეთ, რომ თანამამრავლების მიმდევრობას მნიშვნელობა აქვს. O წერტილის გარშემო **ძალის მომენტი** ანუ **მაბრუნე მომენტი**:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1.8)$$

\mathbf{N} -ისთვის 1.3 ფორმულის ანალოგიური ფორმულა მიიღება, თუ \mathbf{r} -ს 1.4 ფორმულაზე ვექტორულად გავამრავლებთ:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \quad (1.9)$$

1.9 ფორმულა ვექტორული იგივეობის საშუალებით სხვა სახითაც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \quad (1.10)$$

ამ ფორმულის მარჯვენა მხარის პირველი წევრი ნულის ტოლია. ამის შედეგად 1.9 ფორმულა ასეთ სახეს იღებს:

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{L}}. \quad (1.11)$$

ყურადღება მიაქციეთ, რომ \mathbf{N} და \mathbf{L} იმ O წერტილზეა დამოკიდებული, რომლის გარშემო მომენტები გამოითვლება.

1.3 ფორმულის მსგავსად, 1.11 ფორმულაც მუდმივობის კანონს ასახავს.

ნაწილაკის კუთხური მომენტის მუდმივობის კანონი: თუ ძალის სრული მომენტი \bar{N} ნულის ტოლია, მაშინ $\dot{\mathbf{L}} = 0$ და \mathbf{L} კუთხური მომენტი მუდმივია.

განვიხილოთ \mathbf{F} გარე ძალის მიერ ნაწილაკზე შესრულებული მუშაობა, განვიხილოთ, როდესაც ის 1 წერტილიდან 2 წერტილისკენ გადაადგილდება. განსაზღვრების თანახმად, მუშაობა არის:

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (1.12)$$

მასის მუდმივობის შემთხვევაში (რასაც ამის შემდეგ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, თუ არიქნება მითითებული სანინაალმდეგო მოსაზრება) 1.12 ფორმულის ინტეგრალი შემდეგი სახით გარდაიქმნება:

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt}(v^2) dt,$$

აქედან გამომდინარე:

$$W_{12} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2). \quad (1.13)$$

$m\mathbf{v}^2/2$ სკალარულ სიდიდეს ნაწილაკის კინეტიკური ენერგია ეწოდება და T სიმბოლოთი აღინიშნება. ამგვარად, შესრულებული მუშაობა კინეტიკური ენერგიის ცვლილების ტოლია:

$$W_{12} = T_2 - T_1. \quad (1.14)$$

თუ ძალის ველი იმგვარია, რომ W_{12} მუშაობა 1 და 2 წერტილებს შორის ნებისმიერი ფიზიკურად შესაძლო ტრაექტორიისთვის თანაბარია, მაშინ ძალას (და სისტემას) **კონსერვატიული** ეწოდება. შესაძლებელია კონსერვატიული სისტემის სხვაგვარი აღწერაც, თუ წარმოვიდგენთ, რომ ნაწილაკი 1 წერტილიდან 2 წერტილისკენ ერთი შესაძლო ტრაე-

ექტორით გადაადგილება და შემდეგ 1 ნერტილს სხვა ტრაექტორიით უბრუნდება. W_{12} მუშაობა ტრაექტორიაზე დამოკიდებული არ არის და ამიტომ ჩაკეტილ წრეზე შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლია:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (1.15)$$

თუ ხახუნის ან დისიპაციის რაიმე სხვა ძალა არსებობს, მაშინ სისტემა კონსერვატიული ვეღარ იქნება, ვინაიდან ხახუნით გამოწვეული $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ ყოველთვის დადებითია და ინტეგრალიც ვერ გაბათილდება.

ვექტორული ანალიზის შედეგად მიღებული ცნობილი თეორიის თანახმად, იმისათვის, რომ W_{12} მუშაობა ნაწილაკის ფიზიკურ ტრაექტორიაზე დამოკიდებული არ იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ძალა მდებარეობის რაიმე სკალარული ფუნქციის გრადიენტი იყოს:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}), \quad (1.16)$$

სადაც V არის **პოტენციალი** ანუ **პოტენციალური ენერჯია**. V -ს არსებობის დამტკიცება მარტივი არგუმენტით ხდება. თუ W_{12} მუშაობა 1 და 2 ნერტილებს შორის ინტეგრების ტრაექტორიაზე დამოკიდებული არ არის, მაშინ W_{12} -ის გამოსახვა იმ სიდიდის ცვლილებით არის შესაძლებელი, რომელიც მხოლოდ ბოლო ნერტილების მდებარეობებზეა დამოკიდებული. ეს სიდიდე — V სიმბოლოთი შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რაც უსასრულოდ მცირე სიგრძის ტრაექტორიის შემთხვევაში გვაძლევს:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -dV$$

ან

$$F_s = -\frac{\partial V}{\partial s},$$

მიღებული ფორმულა 1.16 ფორმულის ექვივალენტურია. 1.16 ფორმულაში შემავალ V -ს სივრცეში მუდმივი ნებისმიერი სიდიდე შეგვიძლია დავუმატოთ და შედეგი არ შეიცვლება. აქედან გამომდინარე, V -ს **ნულოვანი დონის შერჩევა პირობითია**.

კონსერვატიული სისტემის შემთხვევაში ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა ასე გამოისახება:

$$W_{12} = V_1 - V_2. \quad (1.17)$$

1.17 და 1.14 ფორმულების გაერთიანების შედეგად მივიღებთ:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2, \quad (1.18)$$

1.18 ფორმულა მუდმივობის კიდევ ერთ კანონს აღწერს.

ენერჯიის მუდმივობის კანონი ნაწილაკისათვის: თუ ნაწილაკზე მოქმედი ძალები კონსერვატიულია, მაშინ ნაწილაკის $T + V$ სრული ენერჯია მუდმივია.

ნაწილაკზე მოდებული ძალა ზოგიერთ შემთხვევაში სკალარული ფუნქციის გრადიენტის სახით შეიძლება წარმოიდგინოს, რომელიც მხოლოდ ნაწილაკის მდებარეობასა და

დროზეა დამოკიდებული. მიუხედავად ამისა, ნაწილაკზე შესრულებული მუშაობა, როდესაც ის ds მანძილს გადის, აღარ არის გადაადგილების განმავლობაში $-V$ ცვლილების ტოლი, ვინაიდან V სიდიდე ნაწილაკის მოძრაობის დროს v სიდიდეც იცვლება:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial V}{\partial s} ds,$$

აქედან გამომდინარე, 1 და 2 წერტილებს შორის ნაწილაკის მოძრაობისას შესრულებული მუშაობა ამ წერტილებს შორის V ფუნქციებს შორის სხვაობის ტოლი აღარ არის. თუმცა $T + V$ სრული ენერჯიის განსაზღვრა კვლავ შესაძლებელია, მაგრამ ნაწილაკის მოძრაობისას ეს სიდიდე მუდმივი აღარ არის.

1.2 ნაწილაკთა სისტემის მექანიკა

ამჯერად წინა პარაგრაფში მოყვანილი მოსაზრებები მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემებისთვის განვაზოგადოთ. ამისთვის სისტემის გარე წყაროებიდან ნაწილაკებზე მოქმედი **გარე ძალები** და სისტემის სხვა ნაწილაკებიდან რაიმე i ნაწილაკზე მოქმედი **შიდა ძალები** უნდა განვასხვაოთ. i -ური ნაწილაკისთვის მოძრაობის განტოლება (ნიუტონის მეორე კანონი) ასეთი სახით ჩაიწერება:

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (1.19)$$

სადაც $\mathbf{F}_i^{(e)}$ არის გარე ძალა, ხოლო \mathbf{F}_{ji} - j -ური ნაწილაკიდან i -ურ ნაწილაკზე მოქმედი შიდა ძალა (ბუნებრივია, \mathbf{F}_{ji} ძალა ნულის ტოლია). ვუშვებთ, რომ \mathbf{F}_{ij} ძალა ($\mathbf{F}_i^{(e)}$ -ს მსგავსად) ნიუტონის მესამე კანონს ემორჩილება ანუ ორ ნივთიერ წერტილს შორის მოქმედი ძალები სიდიდით ტოლი და მიმართულებით საპირისპირონი არიან. ამგვარი დაშვება ყველა სახის ძალისთვის მართებული არ არის და ზოგჯერ მას **ქმედებისა და უკუქმედების სუსტ კანონს** უწოდებენ.

ყველა ნაწილაკისთვის შეკრების შედეგად 1.19 ფორმულა ასეთ სახეს იღებს:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ji}. \quad (1.20)$$

ფორმულის მარჯვენა მხარეს მოქცეული პირველი ჯამი უბრალოდ $\mathbf{F}^{(e)}$ ტოლქმედი გარე ძალაა, ხოლო მეორე წევრი ბათილდება, ვინაიდან ქმედების და უკუქმედების კანონის თანახმად, თითოეული $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}$ წყვილი ნულის ტოლია. ფორმულის მარცხენა მხარის გასამარტივებლად შემოვიღოთ \mathbf{R} ვექტორი, რომელიც ტოლი იქნება ნაწილაკთა მასისა და რადიუს-ვექტორების ჯამის ფარდობისა ნაწილაკთამასების ჯამთან:

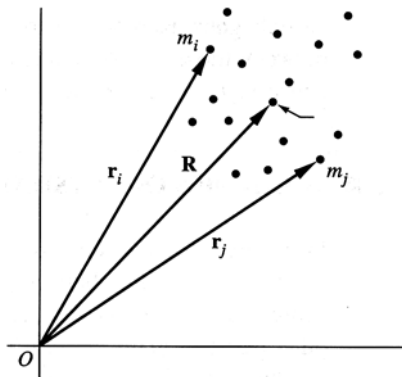
$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}. \quad (1.21)$$

\mathbf{R} ვექტორი სისტემის **მასების ცენტრის** ან გრავიტაციული ცენტრის მდებარეობას განსაზღვრავს (ნახ. 1.1). ამგვარი განმარტების შედეგად 1.20 ფორმულა ასეთ სახეს იღებს:

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \equiv \mathbf{F}^{(e)}, \quad (1.22)$$

1.22 ფორმულის თანახმად, მასების ცენტრი ისე მოძრაობს, თითქოს ტოლქმედი გარე ძალა სისტემის მასების ცენტრზე კონცენტრირებულ მთლიან მასაზე მოქმედებს. შიდა ძალები ნიუტონის მესამე კანონს ემორჩილებიან ანუ მასების ცენტრის მოძრაობაზე გავლენას არ ახდენენ. ხშირად მოყავთ გარსის აფეთქების მაგალითი, როდესაც მისი ფრაგმენტების მასების ცენტრი ისე მოძრაობს, თითქოს გარსი კვლავ ერთი მთლიანი სხეული იყოს.

იგივე პრინციპი მოქმედებს რეაქტიული და სარაკეტო მოძრაობისას. მასების ცენტრის მოძრაობა არ იცვლება, ვინაიდან მაღალი სიჩქარით გამოსროლილ გამონაბოლქვს ტრანსპორტის დაბალი სიჩქარით წინ მოძრაობა აბალანსებს.



ნახ.1.1. ნაწილაკთა სისტემის მასების ცენტრი

1.21 ფორმულიდან გამომდინარე, სისტემის სრული იმპულსი სისტემის ჯამური მასის ნამრავლია მასების ცენტრის სიჩქარეზე:

$$\mathbf{P} = \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad (1.23)$$

მასების ცენტრის მოძრაობის განტოლება (1.23) მუდმივობის კიდევ ერთ კანონს ასახავს.

ნერტილთა სისტემის იმპულსის მუდმივობის კანონი: თუ ტოლქმედი გარე ძალა ნულის ტოლია, მაშინ ნაწილაკთა სისტემის სრული იმპულსი მუდმივია.

თუ შევადგენთ $\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ ვექტორულ ნამრავლს და ავჯამავთ i -ით მივიღებთ სისტემის

სრულ კუთხურ მომენტს. თუ ეს ოპერაცია 1.19 ფორმულაში ჩავატარეთ, მაშინ 1.10 იგივეობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

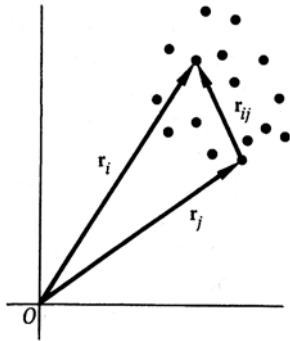
$$\sum_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i) = \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}. \quad (1.24)$$

1.24 ფორმულის მარჯვენა მხარეს მდებარე უკანასკნელი წევრი, ქმედება-უკუქმედების ტოლობის გათვალისწინებით შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ასეთი ფორმის წყვილთა ჯამი:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}, \quad (1.25)$$

$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ j -დან i -მდე გავლებული \mathbf{r}_{ij} ვექტორის იდენტურია (ნახ. 1.2.), ამიტომ 1.25 ფორმულის მარჯვენა მხარე ასეთი სახით შეიძლება ჩაინეროს:

$$\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ji}.$$



ნახ. 1.2. \mathbf{r}_{ij} ვექტორი i და j რიგის ნნანილაკებს შორის

თუ ორ წერტილს შორის მოქმედი შიდა ძალები, გარდა იმისა, რომ სიდიდით ტოლები და მიმართულებით საპირისპირონი არიან, წერტილების შემაერთებული წრფის გასწვრივ მოქმედებენ (ასეთ მდგომარეობას **ქმედების და უკუქმედების მკაცრი კანონი** აღწერს), მაშინ ყველა ვექტორული ნამრავლი ბათილდება. წყვილებისათვის მიღებული ჯამი ნულის ტოლია და 1.24 ფორმულა ასეთი სახით ჩაინერება:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^{(e)}. \quad (1.26)$$

სრული კუთხური მომენტის დროით წარმოებული მოცემული წერტილის მიმართ გარე ძალის იმპულსის ტოლია. 1.26 ფორმულა მუდმივობის კიდევ ერთ კანონს ასახავს.

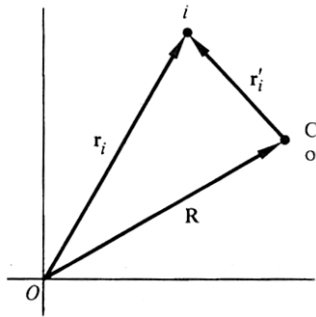
სრული კუთხური მომენტის მუდმივობის კანონი: \mathbf{L} დროში მუდმივია თუ მოდებული გარე ძალის მომენტი ნულის ტოლია.

(საზგასმით უნდა ითქვას, რომ ეს თეორემა **ვექტორულია** ანუ $\vec{\mathbf{L}}$ მუდმივი იქნება იმ შემთხვევაში, თუ $\vec{\mathbf{N}}$ ნულის ტოლია, ხოლო $\vec{\mathbf{N}}$ და $\vec{\mathbf{N}}$ შესაძლოა ნულისგან განსხვავდებოდნენ).

მოდებული ძალების არარსებობის პირობებში იმპულსის მუდმივობისთვის საჭიროა

დაშვება, რომ ქმედებისა და უკუქმედების სუსტი კანონი შიდა ძალებს მიესადაგება. შევნიშნოთ, რომ იმპულსის შენახვა მოდებული ძალების არარსებობის შემთხვევაში გულისხმობს, რომ ქმედება-უკუქმედების სუსტი კანონი სამართლიანია შიდა ძალებისათვის. სისტემის სრული კუთხური მომენტის შენახვა მოდებული ძალების მომენტის არარსებობის შემთხვევაში ითხოვს ქმედება-უკუქმედების ძლიერი კანონის სამართლიანობას და, დამატებით, იმას, რომ შიდა ძალები **ცენტრალური** იყოს. მრავალი ცნობილი ფიზიკური ძალა, მაგალითად მიზიდულობა, კანონის მკაცრ ფორმას აკმაყოფილებს. მიუხედავად ამისა, შესაძლებელია ისეთი ძალების გამოვლენა, რომლებიც ცენტრალურები არ არიან, მაგრამ მათთვის ქმედება და უკუქმედება თანაბარია.

მაგალითად, მოძრავი მუხტების სისტემაში მოქმედი, ბიო-სავარის კანონით ნაწინასწარმეტყველები ძალები კანონის ორივე ფორმას არღვევენ.* ასეთ შემთხვევაში 1.23 და 1.26 ფორმულები და მათი შესაბამისი მუდმივობის კანონები ვარგისნი არ არიან. ყოველ შემთხვევაში იმ ფორმით, როგორც ეს აქ არის მოცემული. ამ დროს შესაძლებელია **P** ან **L**-ის რაიმე განზოგადების პოვნა, რომელიც ინახება. მაშასადამე, მოძრავი მუხტების იზოლირებულ სისტემაში მექანიკური კუთხური მომენტისა და ველის ელექტრომაგნიტური „კუთხური მომენტის“ ჯამი ინახება.



სურ. 1.3. ათვლის წერტილის ძვრასთან დაკავშირებული ვექტორები კუთხური იმპულსისთვის

1.23 ფორმულის თანახმად, სისტემის სრული იმპულსია ისეთია, თითქოს მთლიანი მასა სისტემის მასთა ცენტრშია კონცენტრირებული და მასთან ერთად მოძრაობს. კუთხური მომენტისათვის განკუთვნილი ანალოგიური თეორემა უფრო რთულად ჟღერს. თუ ათვლის სათავე ათვლის წერტილია, მაშინ სისტემის სრული კუთხური მომენტი ასე გამოისახება:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i.$$

R იყოს *O*-დან მასების ცენტრამდე გავლებული რადიუს-ვექტორი, ხოლო **r'**_{*i*} - მასების ცენტრიდან *i*-ურ წერტილამდე გავლებული რადიუს-ვექტორი. ამ შემთხვევაში მივიღებთ (ნახ. 1.3.):

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} \quad (1.27)$$

და

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}$$

სადაც \mathbf{v} არის მასათა ცენტრის სიჩქარე O -ს მიმართ:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad \mathbf{v}'_i = \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}$$

ხოლო \mathbf{v}'_i არის i -ური ნაწილაკის სიჩქარე სისტემის მასათა ცენტრის მიმართ. 1.27 ფორმულის საშუალებით სრული კუთხური მომენტი ასე გამოითვლება:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r} \times m_i \mathbf{v}'_i + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{v} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i.$$

ამ ფორმულის ბოლო ორი წევრი ნულის ტოლია, ვინაიდან ორივე მათგანი $\sum m_i \mathbf{r}'_i$ -ს შეიცავს. $\sum m_i \mathbf{r}'_i$ მასების ცენტრის რადიუს-ვექტორს სწორედ იმ კოორდინატა სისტემაში განსაზღვრავს, რომლის სათავე მასათა ცენტრში არის მოთავსებული. დარჩენილი წევრები ხელახლა გადავწეროთ და სრული კუთხური მომენტი O წერტილის მიმართ იქნება:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i. \quad (1.28)$$

1.28 ფორმულის თანახმად, O წერტილის მიმართ სრული კუთხური მომენტი არის მასათა ცენტრის კუთხური მომენტი პლუს მასათა ცენტრის მიმართ მოძრაობის კუთხური მომენტი. 1.28 ფორმულის მიხედვით, \mathbf{L} დამოკიდებულია O კოორდინატა სათავეზე, რომელზეც \mathbf{R} ვექტორი გადის. მხოლოდ მაშინ, როდესაც მასათა ცენტრი უძრავია O -ს მიმართ, კუთხური მომენტი დამოუკიდებელია ათვის წერტილისაგან. ამ შემთხვევაში (1.28)-ის პირველი წევრი ნულის ტოლი ხდება და \mathbf{L} მომენტი დადის მასათა ცენტრის მიმართ აღებულ კუთხურ მომენტზე.

ახლა ენერჯის განტოლება განვიხილოთ. ისევე როგორც ერთი წერტილის შემთხვევაში, ყველა ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა გამოვთვალოთ, როდესაც სისტემა 1 მდგომარეობიდან 2 მდგომარეობაში გადადის:

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i. \quad (1.29)$$

მოძრაობის განტოლებების საშუალებით ინტეგრალები მარტივდება:

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right).$$

აქედან გამომდინარე, შესრულებული მუშაობა კვლავ სანყისი და საბოლოო კინეტიკური ენერგიების სხვაობის სახით შეიძლება ჩაინეროს:

$$W_{12} = T_2 - T_1,$$

სადაც T არის სისტემის სრული კინეტიკური ენერგია:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2. \quad (1.30)$$

1.27 ფორმულაში მოცემული მასათა ცენტრის კოორდინატებში გადასვლით T ასეთი სახითაც შეიძლება ჩაინეროს:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \sum_i m_i v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right), \end{aligned}$$

კუთხური მომენტის გამოთვლისას მოყვანილი მოსაზრების გამო, ამ ფორმულის უკანასკნელი წევრი ბათილდება და გვრჩება:

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 \quad (1.31)$$

კუთხური მომენტის მსგავსად, კინეტიკური ენერგიაც ორი ნაწილისაგან შედგება - ეს არის მასათა ცენტრის მოძრაობის კინეტიკური ენერგია პლუს მასებათა ცენტრის მიმართ მოძრაობის კინეტიკური ენერგია.

განვიხილოთ 1.29 ფორმულის მარჯვენა მხარე. თუ გარე ძალები შეიძლება გამოისახოს პოტენციალის გრადიენტის საშუალებით მაშინ, ამ ფორმულის პირველი წევრი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i V_i |1^2,$$

სადაც i ინდექსი ოპერატორთან ასახავს იმას, რომ განარმოება \mathbf{r}_i -ის კომპონენტებით ხდება. თუ შიდა ძალები კონსერვატულია, მაშინ i -ურ და j -ურ წერტილებს შორის მოქმედი \mathbf{F}_{ij} და \mathbf{F}_{ji} ძალები V_{ij} პოტენციალის ფუნქციის საშუალებით მიიღებინან. ქმედების და უკუქმედების მკაცრი კანონის შესრულებისთვის V_{ij} მხოლოდ ნაწილაკებს შორის მანძილის ფუნქცია შეიძლება იყოს:

$$V_{ij} = V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (1.32)$$

ამ შემთხვევაში ორი ძალა სიდიდით თანაბარი და მიმართულებით საპირისპიროა:

$$\mathbf{F}_{ji} = - \nabla_i V_{ij} = + \nabla_j V_{ij} = - \mathbf{F}_{ij}, \quad (1.33)$$

გარდა ამისა, ძალები ნაწილაკების შემაერთებელი წრფის გასწვრივ მოქმედებენ:

$$\nabla V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) f, \quad (1.34)$$

სადაც f არის რაიმე სკალარული ფუნქცია. თუ V_{ij} ნაწილაკებთან დაკავშირებული ვექტორების რაიმე სხვა წყვილის, მაგალითად სიჩქარეების ან (თუ გადავალთ თანამედროვე ფიზიკის არეში) შიდა „სპინური“ კუთხური მომენტის სხვაობის ფუნქციაა, მაშინ ძალები კვლავ სიდიდით თანაბარი და მიმართულებით საპირისპირონი იქნებიან, მაგრამ ნაწილაკებს შორის გავლებული წრფის გასწვრივ შესაძლოა აღარ იმოქმედონ.

როდესაც ყველა ძალა კონსერვატულია, 1.29 ფორმულის მეორე წევრი ნაწილაკთა **წყვილების** ჯამის სახით შეიძლება ჩაინეროს და თითოეული წყვილის შესაბამისი წევრის ასეთი სახის იქნება:

$$-\int_1^2 (\nabla_i V_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i + \nabla_j V_{ij} \cdot d\mathbf{s}_j).$$

თუ $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ სხვაობის ვექტორს \mathbf{r}_{ij} სიმბოლოთი აღვნიშნავთ და ∇_{ij} გრადიენტია, მაშინ:

$$\nabla_i V_{ij} = \nabla_{ij} V_{ij} = -\nabla_j V_{ij},$$

და

$$d\mathbf{s}_i - d\mathbf{s}_j = d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j = d\mathbf{r}_{ij},$$

მაშასადამე, ij წყვილისთვის განკუთვნილი წევრი ასეთი სახისაა:

$$-\int \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}.$$

შიდა ძალების მიერ შესრულებულისრული მუშაობაა:

$$-\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij}^2. \quad (1.35)$$

1.35 ფორმულაში $\frac{1}{2}$ კოეფიციენტი გვაქვს, ვინაიდან i -ით და j -ით შეკრებისას მოცემული წყვილი ორჯერ გვხვდება, თავდაპირველად i -ით შეკრებისას, ხოლო შემდეგ j -ით შეკრებისას.

ცხადია, რომ თუ შიდა და გარე ძალები პოტენციალებიდან მიიღება, მაშინ სისტემის V **სრული პოტენციალური ენერგია** არის:

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij}, \quad (1.36)$$

$T + V$ სრული ენერგია მუდმივია და 1.36 ფორმულა ერთი ნაწილაკისათვის მიღებული 1.18 ფორმულის ანალოგიურია.

1.36 ფორმულის მარჯვენა მხარეს მდებარე მეორე წევრს სისტემის შიდა პოტენციალური ენერგია ეწოდება. ეს წევრი აუცილებელი არ არის ნულის ტოლი იყოს და რაც უფრო მნიშვნელოვანია, სისტემის დროში ცვლილებასთან ერთად შეიძლება შეიცვალოს. მხოლოდ **მყარი სხეულების** სახელით ცნობილ სისტემათა კლასში არის შიდა პოტენცია-

ლი ყოველთვის მუდმივი. მყარი სხეული ნაწილაკთა სისტემაა, რომელშიც \mathbf{r}_{ij} მანძილები ფიქსირებულია და დროში არ იცვლება.

ამ შემთხვევაში $d\mathbf{r}_{ij}$ ვექტორები შესაბამისი \mathbf{r}_{ij} -სადმი და, მაშასადამე, \mathbf{F}_{ij} -სადმი პერპენდიკულარებია. აქედან გამომდინარე, მყარ სხეულებში **შიდა ძალები მუშაობას არ ასრულებენ** და შიდა პოტენციალი მუდმივია. ვინაიდან შესაკრებ მუდმივაში შემავალი სრული პოტენციალი ნებისმიერ შემთხვევაში განუსაზღვრელია მუდმივი შესაკრების სიზუსტით, უცვლელი შიდა პოტენციალი სისტემის მოძრაობის განხილვისას შეგვიძლია უგულებელვყოთ.

1.3 ბმები

წინა პარაგრაფებიდან შესაძლოა შეგექმნათ შთაბეჭდილება, რომ მექანიკასთან დაკავშირებული ყველა ამოცანა 1.19 დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნაზე დაიყვანება:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ji}.$$

უბრალოდ უნდა ჩავსვათ ნაწილაკთა სისტემაზე მოქმედი სხვადასხვა ძალები, ჩავატაროთ მათემატიკური გათვლები და მივიღებთ საძიებელ პასუხს! სუფთა ფიზიკური მოსაზრებებიდან კი ეს თვალსაზრისი ზედმეტად გამარტივებულია. მაგალითად, ზოგჯერ აუცილებელია გავითვალისწინოთ ბმები, რომლებიც შეზღუდვას ადებს სისტემის მოძრაობას. ბმების შემცველ სისტემათა სახეობას ჩვენ უკვე შევხვეთ, როგორცაა მყარი სხეული.

მყარი სხეულის შემთხვევაში ნაწილაკთა მოძრაობის ბმები \mathbf{r}_{ij} მანძილს უცვლელს ტოვებს. ბმული სისტემის მაგალითების მოყვანა უხვად შეიძლება. მაგალითად, საანგარიშოს ბურთულებს მავთულები მხოლოდ ერთ განზომილებაში მოძრაობისაშუალებას აძლევენ. ჭურჭელში მოქცეული აირის მოლეკულები კედლების ზემოქმედების შედეგად მხოლოდ ჭურჭლის შიგნით მოძრაობენ. მყარი სფეროს ზედაპირზე განლაგებულ ნაწილაკს მხოლოდ ზედაპირზე ან სფეროს გარე არეალში შეუძლია მოძრაობა.

ბმების კლასიფიკაცია სხვადასხვა მეთოდით ხდება. ჩვენ მიერ შერჩეული მეთოდი ქვემოთაა მოყვანილი. თუ ბმების პირობები ნაწილაკთა კოორდინატების დამაკავშირებელი განტოლებებით შეიძლება გამოისახოს, რომელთაც შემდეგი სახე აქვთ:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, t) = 0, \tag{1.37}$$

მაშინ ბმას **ჰოლონომური** ეწოდება. ჰოლონომური ბმების უმარტივესი მაგალითი მყარი სხეულია, რომელშიც ბმები შემდეგი სახის განტოლებებით გამოისახება:

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0.$$

ჰოლონომური ბმების კიდევ ერთი ნათელი მაგალითია ნაწილაკი, რომელსაც მოძ-

რაობა შეუძლია მხოლოდ რაიმე მრუდის გასწვრივ ან მოცემულ ზედაპირზე. მრუდის ან ზედაპირის განმსაზღვრელი განტოლება ბმის განტოლების ფუნქციას ასრულებს.

ბმებს, რომლებიც ზემოთ აღწერილი მეთოდით არ გამოისახებიან, არაჰოლონომური ენოდებათ. აირის ჭურჭლის კედლები არაჰოლონომური ბმის მაგალითია. არაჰოლონომური ბმა სფეროს ზედაპირზე განლაგებული ნივთიერი ნერტილის შემთხვევაშიც მოქმედებს, ვინაიდან შეზღუდვა შემდეგი უტოლობის საშუალებით შეგვიძლია გამოვსახოთ:

$$r^2 - a^2 \geq 0$$

სადაც a არის სფეროს რადიუსი. რაც 1.37 ფორმულის მსგავსი არ არის. ამიტომ სფეროს ზედაპირის ზედა ნაწილში მოთავსებული ნერტილი დედამიწის მიზიდულობის ველში ქვევით ჩამოსრიალდება და შემდეგ ჩამოვარდება.

ბმების კლასიფიკაცია იმის მიხედვითაც შეიძლება, ბმის განტოლება დროს შეიცავს, როგორც ცხად ცვლადს (რეონომიული ბმა) თუ დროზე დამოკიდებული არ არის (სკლერონომიულიბმა). სივრცეში ფიქსირებულ მავთულზე მოძრავ ბურთულაზე სკლერონომიული ბმა მოქმედებს, ხოლო თუ მავთული გარკვეული კანონზომიერებით მოძრაობს, მაშინ ბმა რეონომიულია.

ყურადღება მიაქციეთ, რომ თუ მავთული ბურთულის მოძრაობის შედეგად მოძრაობს, მაშინ ბმის დროზე დამოკიდებულება ბმის განტოლებაში მხოლოდ მავთულის კოორდინატების საშუალებით შედის (მავთულის კოორდინატები ამჯერად სისტემის კოორდინატების ნაწილია). ამ შემთხვევაში მთლიანი ბმა სკლერონომიულია.

მექანიკური ამოცანების ამოხსნისას ბმები ორი სახის სირთულეს ქმნიან. პირველი სირთულე იმაში მდგომარეობს, რომ r_i კოორდინატები ერთმანეთისგან დამოუკიდებელნი აღარ არიან, ვინაიდან მათ ბმის განტოლებები აკავშირებთ. აქედან გამომდინარე, მოძრაობის 1.19 განტოლებებიც აღარ არიან დამოუკიდებელნი. მეორე სირთულე კი ის არის, რომ, ბმის ძალები, მაგალითად მავთულიდან ბურთულაზე მოქმედი ძალა ან აირის ნაწილაკზე კედლიდან მოქმედი ძალა, წინასწარ არ არიან განსაზღვრულნი და ისინი ამოცანაში შემავალ უცნობებს ემატებიან და უნდა განისაზღვრონ იმ ამოხსნებიდან, რომელსაც ვეძებთ. სისტემისთვის ბმის დაწესება ნიშნავს, რომ ამოცანაში შედიან ძალები, რომელთა განსაზღვრა პირდაპირ შეუძლებელია და ისინი სისტემის მოძრაობაზე მოხდენილი ზეგავლენის მიხედვით უნდა განისაზღვრონ.

პირველი სირთულე ჰოლონომური შეზღუდვების შემთხვევაში **განზოგადებული კოორდინატების** შემოტანით დაიძლევა. ადრე ჩვენ მხოლოდ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას განვიხილავდით. N ნაწილაკისაგან შემდგარ, ბმებისაგან თავისუფალ სისტემას $3N$ დამოუკიდებელი კოორდინატი ანუ **თავისუფლების ხარისხი** აქვს. თუ ჰოლონომური ბმები 1.37 ფორმის k განტოლებით გამოისახება, მაშინ ამ განტოლებების საშუალებით $3N$ კოორდინატს k უნდა გამოვაკლოთ და $3N - k$ დამოუკიდებელი კოორდინატი დაგვრჩება. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სისტემას $3N - k$ თავისუფლების

ხარისხი აქვს. ერთმანეთზე დამოკიდებული კოორდინატების გამორიცხვა სხვა მეთოდითაც შეიძლება. შემოვიტანოთ ახალი, $3N - k$ რაოდენობის $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$ დამოუკიდებელი ცვლადი და მათი საშუალებით $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ ძველი კოორდინატები შემდეგი სახის ფორმულებით გამოვსახოთ:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_N &= \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \end{aligned} \tag{1.38}$$

1.38 ფორმულები ბმებს ცხადად შეიცავენ და ისინი (\mathbf{r}_i) ცვლადების სიმრავლიდან (q_i) სიმრავლეზე **გარდაქმნის** ფორმულებია ან სხვაგვარად რომ ვთქვათ, 1.38 ფორმულები (\mathbf{r}_i) ცვლადებს პარამეტრულად ასახავენ. (q_i) სიმრავლიდან (\mathbf{r}_i) სიმრავლეზე დაბრუნება ყოველთვის შესაძლებელია ანუ 1.38 ფორმულების შეზღუდვის k ფორმულებთან გაერთიანება შეგვიძლია შევაბრუნოთ და ნებისმიერი q_i დროის და (\mathbf{r}_i) ცვლადის ფუნქციის სახით გამოვსახოთ.

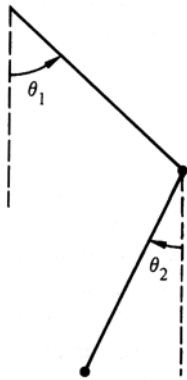
ჩვეულებრივ, დეკარტეს კოორდინატებისაგან განსხვავებით, განზოგადებულ კოორდინატებს არ ყოფენ სამეულებად, რომლებიც შეგვიძლია ვექტორის კოორდინატებად გამოვიყენოთ. მაშასადამე, როდესაც ნაწილაკი სფეროს ზედაპირზე ბმულად მოძრაობს და სფეროზე მდებარეობს ორი კუთხე, ვთქვათ გრძედი და განედი ასახავს, მაშინ ისინი შეგვიძლია განზოგადებულ კოორდინატებად წარმოვადგინოთ. ან, მაგალითად, ორმაგი ქანქარისათვის სიბრტყეზე მოძრავი (ორმაგი ქანქარა წარმოადგენს მსუბუქ უჭიმვად ძელაკზე დამაგრებულ ორ ნაწილაკს, რომელიც ჩამოკიდებულია ერთ-ერთი ნაწილაკით ასევე ძელაკზე), განზოგადებული კოორდინატები θ_1 და θ_2 კუთხეებია (ნახ. 1.4).

განზოგადებული კოორდინატები ბმებისაგან თავისუფალ სისტემებშიც გამოსადეგნი არიან. მაშასადამე, როდესაც ამოცანაში ნაწილაკი გარე ცენტრალური ძალის ველში ($V = V(r)$) მოძრაობს, ბმა არ არსებობს, მაგრამ სფერული პოლარული კოორდინატების გამოყენება დეკარტის კოორდინატებზე უფრო მოსახერხებელია. განზოგადებული კოორდინატები მდებარეობის ჩვეულებრივ ორთოგონალურ კოორდინატებთან არ უნდა გავაიგივოთ. განზოგადებული კოორდინატი ნებისმიერი სახის სიდიდე შეიძლება იყოს. აქედან გამომდინარე, \mathbf{r}_j -ს ფურიეს მწკრივად გაშლაში შემავალი ამპლიტუდები განზოგადებულ კოორდინატებად შეგვიძლია გამოვიყენოთ და ასევე შეგვიძლია დავიხმაროთ ენერჯის ან კუთხური მომენტის განზომილების მქონე სიდიდეები.

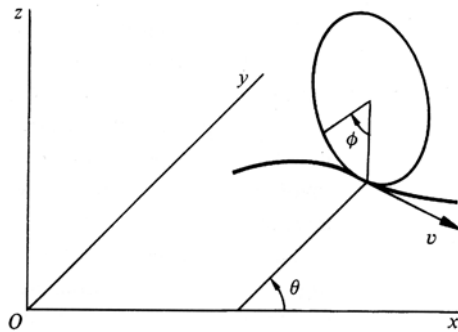
თუ ბმა არაჰოლონომურია, მაშინ ბმის ამსახველი განტოლებების საშუალებით კოორდინატთა დამოკიდებულებებს ვერ გამოვრიცხავთ. არაჰოლონომური ბმის კარგი მაგალითია უხეშ ზედაპირზე სრიალის გარეშე მგორავი საგანი. სისტემის ამსახველი კოორდინატები სხეულის ორიენტაციის განმსაზღვრელ კუთხურ კოორდინატებს და ზედაპირთან შეხების წერტილის მდებარეობის ამსახველ კოორდინატთა სიმრავლეს შეი-

ცავენ. „გორვის“ ბმა კოორდინატთა ამ სიმრავლებებს აერთიანებს და ისინი დამოუკიდებელნი არ არიან. შეხების წერტილის მდებარეობის ცვლილება აუცილებლად მისი მიმართულების ცვლილებას ნიშნავს.

მიუხედავად ამისა, კოორდინატთა რაოდენობა არ მცირდება, ვინაიდან გორვის პირობა ვერ გამოისახება (1.37) ტიპის განტოლებით, რომელიც კოორდინატებს აკავშირებს. „გორვა“ უფრო **სიჩქარეებზე** დამოკიდებული მდგომარეობაა (ანუ შეხების წერტილი უძრავია), რომელიც ინტეგრალური ფორმით ამოცანის ამოხსნის შემდეგ შეგვიძლია აღვწეროთ.



ნახ. 1.4. ორმაგი ქანქარა



ნახ. 1.5. ვერტიკალური დისკო ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე გორავს

ამის საილუსტრაციოდ ერთი მარტივი მაგალითი მოვიყვანოთ. განვიხილოთ ჰორიზონტალურ xy სიბრტყეზე მგორავი დისკო. ბმა იმაში მდგომარეობს, რომ დისკოს სიბრტყე ყოველთვის ვერტიკალურია. მოძრაობის ამსახველი შეიძლება იყოს დისკოს ცენტრის x , y კოორდინატები, დისკოს ღერძის გარშემო ბრუნვის ϕ კუთხე და დისკოს ღერძსა და, მაგალითად, x ღერძს შორის θ კუთხე (ნახ. 1.5.). ბმის შედეგად დისკოს ცენტრის \mathbf{v} სიჩქარე $\dot{\phi}$ -ს პროპორციულია:

$\mathbf{v} = a\dot{\phi}$, სადაც a არის დისკოს რადიუსი და მისი მიმართულება დისკოს ღერძისადმი პერპენდიკულარულია:

$$\dot{x} = v \sin \theta,$$

$$\dot{y} = -v \cos \theta.$$

ამ პირობების გაერთიანების შედეგად ბმის ორ **დიფერენციალურ** განტოლებას მივიღებთ:

$$dx - a \sin \theta d\phi = 0, \tag{1.39}$$

$$dy + a \cos \theta d\phi = 0.$$

1.39 ფორმულების ინტეგრება ამოცანის ამოხსნამდე შეუძლებელია ანუ ინტეგრების

$f(x, y, \theta, \phi)$ კოეფიციენტს ვერ გამოვთვლით, რომელიც ორივე ფორმულას ზუსტ დიფერენციალად გარდაქმნის (შდრ. სავარჯიშო).* ამგვარად, ბმა მიიყვანება (1.37) ფორმაზე და იგი ჰოლონომური ყოფილა. ფიზიკურად შეიძლება დანახვა, რომ ϕ -სა და x , y და θ კოორდინატებს შორის პირდაპირი ფუნქციონალური დამოკიდებულება არ არსებობს, ვინაიდან ტრანექტორიის ნებისმიერ წერტილზე დისკომ ტრანექტორიის მხებ და პირობითი რადიუსის წრეზე შეიძლება იგოროს. პროცესის დასასრულს x , y და θ კოორდინატები სანყის მნიშვნელობებს იძენენ, ხოლო ϕ კუთხე წრის რადიუსზე დამოკიდებულებით იცვლება.

1.39 ფორმულებით ჩანერილი არაინტეგრებადი დიფერენციალური ბმები, რა თქმა უნდა, არაჰოლონომიური ბმების ერთადერთ სახეობას არ მიეკუთვნებიან. ბმების პირობები მაღალი რიგის წარმოებულებს, ან როგორც უკვე ვნახეთ, უტოლობებს შეიძლება შეიცავდნენ.

ვინაიდან დამოკიდებული კოორდინატები გამოირიცხებიან, ჰოლონომური ბმების შემცველი ამოცანების ფორმალური ამოხსნა ყოველთვის შესაძლებელია. არაჰოლონომური ამოცანების ამოხსნის ზოგადი მეთოდი არ არსებობს. თუ ბმა არაინტეგრებადია, ბმის დიფერენციალური განტოლებები მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებთან ერთად შეგვიძლია შემოვიტანოთ, ხოლო დამოკიდებულ განტოლებებს ლაგრანჟის მამრავლის საშუალებით გამოვრიცხავთ.

არაჰოლონომური ამოცანების ამოხსნის ამგვარ მეთოდს მოგვიანებით დავუბრუნდებით. არაჰოლონომური ბმების უფრო რთულ შემთხვევებს ინდივიდუალური მიდგომა სჭირდებათ. კლასიკური მექანიკის შემადგენელი ნაწილების ევოლუციის შედეგად მიღებულია, რომ ნებისმიერი ბმა, თუ ასეთი საერთოდ არსებობს, ჰოლონომურია. ამგვარი დაშვება თეორიის ვარგისიანობას დიდად არ ამცირებს, თუმცა ყოველდღიურ სინამდვილეში არაჰოლონომური ბმები მრავლად გვხვდება. რატომ ხდება ასე? მიზეზი ის არის, რომ სისტემაში არსებული ბმების ცნება, იქნება ეს მავთულების, ზედაპირების თუ კედლების გარემო, მხოლოდ მაკროსკოპულ ანუ დიდი ზომის ამოცანებშია ადეკვატური. თანამედროვე ფიზიკოსებს კი უფრო ატომური და ბირთვული ამოცანები აინტერესებთ. ამ დროს სისტემის შიგნით თუ გარეთ მდებარე ყველა საგანი მოლეკულებისგან, ატომებისგან ან უფრო პატარა ნაწილაკებისაგან შედგება. საგნის შემადგენელი ნაწილები ერთმანეთზე განსაზღვრული ძალებით მოქმედებენ და ბმების ცნება ვირტუალური ხდება.

ბმები მხოლოდ რეალური ფიზიკური შემთხვევების მათემატიკური იდეალიზაციისთვის ან კვანტურ-მექანიკურ მახასიათებელთან კლასიკური მიახლოებისთვის გამოიყენება. ამგვარი ბმები ყოველთვის ჰოლონომურებია და თეორიის ჩარჩოებში ადვილად ჯდება.

მეორე სიძნელის (ბმების ძალები უცნობებია) გადალახვისთვის მექანიზმი ისე უნდა ჩამოვყალიბოთ, რომ ბმის ძალები საერთოდ გაქრნენ. ამ შემთხვევაში, მხოლოდ ცნობილი მოდებული ძალები დარჩებიან. მითითება იმაზე, რა პროცედურა უნდა ჩატარდეს, გაპირობებულია იმ ფაქტით რომ ნებისმიერ სისტემაში მაგალითად, მყარ სხეულში, შიდა

ძალების (რომლებიც ამ შემთხვევაში ბმის ძალებს წარმოადგენენ) მუშაობა ნულის ტოლი ხდება. ჩვენ ქვევით გავყვებით ამ გზას და განვაზოგადებთ ამ იდეას.

1.4 დ'ალემბერის წესი და ლაგრანჟის განტოლებები

სისტემის წარმოსახვითი (უხასრულოდ მცირე) გადაადგილება სისტემის მდგომარეობის ცვლილებასთან არის დაკავშირებული, რომელიც t მოცემულ მომენტში სისტემაზე მოქმედი ძალების და ბმების შედეგად კოორდინატების უხასრულოდ მცირე $\delta \mathbf{r}_i$ ცვლილების შედეგად ხდება. გადაადგილებას წარმოსახვითი ეწოდება, რათა ის dt დროის შუალედში სისტემის რეალური გადაადგილებისგან განასხვავონ, რომლის დროსაც ძალები და ბმები იცვლება.

დავუშვათ, სისტემა წონასწორულ მდგომარეობაშია ანუ თითოეულ ნაწილაკზე მოქმედი \mathbf{F}_i ტოლქმედი ძალა ნულის ტოლია. ამ შემთხვევაში \mathbf{F}_i ძალის მიერ $\delta \mathbf{r}_i$ გადაადგილებისას შესრულებული წარმოსახვითი მუშაობა ანუ $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$ სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლი ხდება. ასეთი ნამრავლების ჯამი ყველა ნაწილაკისათვის ნულის ტოლი უნდა იყოს:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1.40)$$

აქამდე არაფერი იყო ნათქვამი, რომელიც ახალ ფიზიკურ შინაარს შეიცავდა. ახლა \mathbf{F}_i ძალა $\mathbf{F}_i^{(a)}$ მოდებულ ძალად და \mathbf{f}_i შეზღუდვის ძალად დავშალოთ:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i, \quad (1.41)$$

1.40 ფორმულა შემდეგი სახით გარდაიქმნება:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1.42)$$

ამჯერად მხოლოდ ისეთ სისტემებს განვიხილავთ, რომლებშიც ბმის ძალების მიერ შესრულებული ჯამური წარმოსახვითი მუშაობა ნულის ტოლია. ეს პირობა მყარი სხეულებისთვის და მრავალი სხვა ბმისათვის სრულდება. აქედან გამომდინარე, როდესაც ნაწილაკი ზედაპირზე შეზღუდულად მოძრაობს, ბმის ძალა ზედაპირისადმი პერპენდიკულარულია, ხოლო წარმოსახვითი გადაადგილება ზედაპირის მხებია და წარმოსახვითი მუშაობა ბათილდება. თუ სრიალის ხახუნის ძალები მოქმედებენ, მაშინ ეს პირობა არ სრულდება. სისტემების არჩევის ზემოთ მოყვანილი პრინციპი მდგომარეობას არ ართულებს, ვინაიდან ხახუნი მაკროსკოპული მოვლენაა. გორვის ხახუნის ძალები ზემოთ მოყვანილ წინადადებაში ჩამოყალიბებულ პირობას არ არღვევენ, ვინაიდან ეს ძალები წამიერად გაჩერებულ წერტილზე მოქმედებენ და უხასრულოდ მცირე გადაადგილებაზე მუშაობას ვერ ასრულებენ, რაც გორვის ბმასთან შესაბამისობაშია.

გათვალისწინეთ, რომ თუ ნაწილაკი მოძრავ ზედაპირზე მოძრაობს, ბმის ძალა მყისი-

ერად ზედაპირისადმი პერპენდიკულარულია და წარმოსახვითი გადაადგილების დროს შესრულებული მუშაობა კვლავ ნულის ტოლია, ხოლო რეალური გადაადგილებისას dt დროში შესრულებული მუშაობა აუცილებელი არ არის გაბათილდეს.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, სისტემის წონასწორობისთვის საჭიროა, რომ **მოდული ძალების** მიერ შესრულებული წარმოსახვითი მუშაობა განუდგეს:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1.43)$$

1.43 ფორმულას ხშირად **წარმოსახვითი მუშაობის წესს** უწოდებენ. $\delta \mathbf{r}_i$ კოეფიციენტები ნულის ტოლები აღარ არიან ანუ $\mathbf{F}_i^{(a)} \neq 0$, ვინაიდან $\delta \mathbf{r}_i$ -ები ბმების გამო ერთმანეთზე დამოკიდებულნი არიან.

კოეფიციენტების ნულთან გასატოლებლად 1.43 ფორმულით მოცემულ წესში დამოუკიდებელი q_i განზოგადებული კოორდინატების წარმოსახვითი გადაადგილებები უნდა შევიტანოთ.

1.43 ფორმულა ჩვენს მოთხოვნებს იმ თვალსაზრისით აკმაყოფილებს, რომ \mathbf{f}_i -ს არ შეიცავს, თუმცა ეს ფორმულა მხოლოდ სტატიკური მდგომარეობისათვის გამოდგება. ჩვენ შემთხვევაში კი სისტემის ზოგადი მოძრაობა გვჭირდება.

გამოსადეგი წესის მისაღებად თავდაპირველად ჯეიმს ბერნულის მოფიქრებულ, ხოლო შემდგომში დ'ალემბერის მიერ განვრცობილ მექანიზმს ვიყენებთ. $\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$ მოძრაობის ფორმულა ასეთი სახით შეიძლება ჩაინეროს:

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0,$$

მაშასადამე, სისტემის შემადგენელი ნაწილაკები წონასწორულ მდგომარეობაში იმგვარი ძალის მოქმედების შედეგად იქნებიან, რომელიც რეალურ ძალას დამატებული - $\dot{\mathbf{p}}_i$ „შებრუნებული ეფექტური ძალის“ ტოლია. 1.40 ფორმულა გარდაიქმნება და ასეთ სახეს იღებს:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (1.44)$$

თუ იგივე პრინციპს მოდებულ ძალებსა და შეზღუდვის ძალებს მივუსადაგებთ მივიღებთ:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

ამჯერადაც მხოლოდ ისეთ სისტემებს განვიხილავთ, რომლებშიც ბმების მიერ შესრულებული წარმოსახვითი მუშაობა გამოირიცხება და ვიღებთ:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (1.45)$$

1.45 ფორმულას ხშირად **დ'ალემბერის წესს** უწოდებენ. მიზანი მიღწეულია, ბმის ძალები გაქრნენ და $^{(a)}$ ინდექსი თამამად შეგვიძლია უგულვებელვყოთ. მიუხედავად ამისა, 1.45 ფორმულა კვლავ არ გვაძლევს სისტემის მოძრაობის განტოლებებს და ამ

მიზნის მისაღწევად დ'ალემბერის წესში განზოგადებული კოორდინატების წარმოსახვითი გადაადგილებები უნდა შევიტანოთ. წარმოსახვითი გადაადგილებები ერთმანეთზე დამოკიდებულნი არ არიან (ჰოლონომური ბმების შემთხვევაში) და δq_i კოეფიციენტები ნულის ტოლი შეიძლება იყოს.

\mathbf{r}_i -დან q_j -ს ენაზე გადასვლა გარდაქმნის 1.38 ფორმულით იწყება:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, t) \quad (1.45')$$

შემდგომში ნაწილობრივი დიფერენცირების „ჯაჭურ წესს“ ვიყენებთ. აქედან გამომდინარე, $\mathbf{v}_i \dot{q}_k$ -ს საშუალებით შემდეგი ფორმულის დახმარებით გამოისახება:

$$\mathbf{v}_i \equiv \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \quad (1.46)$$

$\delta \mathbf{r}_i$ პირობით წარმოსახვით გადაადგილებას δq_i წარმოსახვით გადაადგილებებს შორის შემდეგი დამოკიდებულებაა:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (1.47)$$

ყურადღება მიაქციეთ, რომ δt დროის ვარიაცია ფორმულაში არ შედის, ვინაიდან განსაზღვრების თანახმად წარმოსახვითი გადაადგილება მხოლოდ კოორდინატების გადაადგილებებს ეხება (მხოლოდ იმ შემთხვევაშია წარმოსახვითი გადაადგილება ბმის ძალის პერპენდიკულარული, როდესაც თავად შეზღუდვა დროში იცვლება).

\mathbf{F}_i წარმოსახვითი მუშაობა განზოგადებული კოორდინატების საშუალებით ასე გამოისახება:

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \partial \mathbf{r}_i &= \sum_{i,j} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_j Q_j \delta q_j, \end{aligned} \quad (1.48)$$

სადაც Q_j -ს **განზოგადებული ძალის** კომპონენტები ეწოდება:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (1.49)$$

q სიდიდე სიგრძის განზომილების შეიძლება არ იყოს, ამიტომ არ არის აუცილებელი Q -ს ძალის განზომილება ქონდეს, თუმცა $Q_j \delta q_j$ -ს ყოველთვის მუშაობის განზომილება აქვს. მაგალითად, Q_j შეიძლება N_j ძალის მომენტი იყოს, ხოლო $dq_j = d\theta_j$ დიფერენციალური კუთხე, რაც $N_j d\theta_j$ -ს მუშაობის დიფერენციალად გახდის.

ამჯერად 1.45 ფორმულის კიდევ ერთ ნევრს მივუბრუნდეთ, რომელიც ასე გამოისახება:

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i.$$

$\delta \mathbf{r}_i$ სიდიდე 1.47 ფორმულით გამოვსახოთ და მივიღებთ:

$$\sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

ამჯერად შემდეგი ფორმულა განვიხილოთ:

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right]. \quad (1.50)$$

1.50 ფორმულის უკანასკნელ წევრში t -თი და q_j -თი დიფერენცირება 1.46 ფორმულის ანალოგიურად შეგვიძლია გადავანაცვლოთ:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}, \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j}, \end{aligned}$$

1.46 ფორმულიდან ასევე ჩანს, რომ:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (1.51)$$

ცვლილებების 1.50 ფორმულაში შეტანა მოგვცემს:

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right],$$

1.45 ფორმულის მარცხენა მხარის მეორე წევრი შემდეგი სახით შეიძლება გაიშალოს:

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - Q_j \right\} \delta q_j.$$

$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ სისტემის T კინეტიკური ენერჯიაა და დ'ალემბერის წესი (1.45 ფორმულა) ასეთ სახეს იღებს:

$$\sum_j \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0. \quad (1.52)$$

დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში T -ს კერძო წარმოებული q_j -თი ქრება და დიფერენციალური გეომეტრიის თვალსაზრისით ის q_j კოორდინატების სიმრუდიდან მიიღება.

პოლარულ კოორდინატებში, მაგალითად, კუთხის კოორდინატით T -ს კერძო წარმოებუ-
ლი ცენტრისკენული აჩქარებაა.

აქამდე ბმების ბუნებას ერთადერთ ბმას ვადებდით, რომ მას წარმოსახვითი გადაადგ-
ილების დროს მუშაობა არ უნდა შეესრულებინა. q_j ცვლადები ნებისმიერი კოორდინატთა
სიმრავლე შეიძლება იყოს, რომელიც სისტემის მოძრაობის აღწერისთვის გამოიყენება.

თუ ბმები ჰოლონომურებია, მაშინ შესაძლებელია q_j დამოუკიდებელი კოორდი-
ნატების სიმრავლის მოძებნა, რომელიც ბმის პირობებს 1.38 გარდაქმნის ფორმულაში
ცხადად შეიცავს. ამ შემთხვევაში ნებისმიერი δq_j წარმოსახვითი გადაადგილება δq_k -ზე
დამოკიდებული არ არის, ამიტომ 1.52 ფორმულის გამოყენების ერთადერთი საშუალება
ინდივიდუალური კოეფიციენტების გამორიცხვაა:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (1.53)$$

სულ n რაოდენობის ამგვარი ფორმულა არსებობს.

როდესაც ძალები სკალარული V პოტენციალის ფუნქციიდან მიიღებიან:

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V.$$

განზოგადებული ძალები შემდეგი სახით ჩაინერება:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

რაც $-V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ ფუნქციის q_j -ით კერძო წარმოებულის გამოსახულებას წარ-
მოადგენს:

$$Q_j \equiv -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (1.54)$$

1.53 ფორმულა ასეთი სახით შეიძლება ჩაინეროს:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0. \quad (1.55)$$

1.55 ფორმულების სახით მოცემული მოძრაობის განტოლებები მხოლოდ კონსერ-
ვატული სისტემებისთვის არ არიან განკუთვნილი. სისტემა მაშინ არის კონსერვატული,
როდესაც V არ არის დროის ცხადი ფუნქცია. V პოტენციალი განზოგადებულ სიჩქარე-
ებზე დამოკიდებული არ არის, ამიტომ შეგვიძლია შევიტანოთ წევრი, რომელიც v -ს \dot{a}_j -
თი კერძო წარმოებულ შეიცავს:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0.$$

თუ L ლაგრანჟის ფუნქციაა:

$$L = T - V, \quad (1.56)$$

მაშინ 1.53 ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (1.57)$$

1.57 ფორმულას ლაგრანჟის განტოლება ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ განტოლებათა რაღაც სიმრავლისათვის არ არსებობს ლაგრანჟიანის ისეთი ცალსახა არჩევანი, რომ (1.57) განტოლებამ მოგვეცეს მოძრაობის განტოლებები მოცემულ განზოგადოებულ კოორდინატებში. აქედან გამომდინარე, მე-8 და მე-10 სავარჯიშოებში ნაჩვენებია, რომ თუ $L(q, \dot{q}, t)$ ფუნქცია წარმოადგენს მიახლოებით ლაგრანჟიანს და $F(q, t)$ განზოგადებული კოორდინატების და დროის ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt} \quad (1.57')$$

1.57' ფორმულა ასევე ლაგრანჟიანი და მოძრაობის იგივე განტოლებებს გვაძლევს. ხშირად შესაძლებელია ლაგრანჟის ალტერნატიული ფუნქციების აგება (იხ. სავარჯიშო 2ა). 1.56 ფორმულა კონსერვატიული სისტემისთვის ლაგრანჟის ფუნქციის შედგენისთვის ყოველთვის გამოსადეგია, მაგრამ ის სისტემის ლაგრანჟის ერთადერთ ფუნქციას არ გვაძლევს.

1.5 სიჩქარეზე დამოკიდებული პოტენციალები და დისიპაციური ფუნქცია

ლაგრანჟის განტოლება 1.57 ფორმულის სახით იმ შემთხვევაშიც შეგვიძლია ჩავწეროთ, როდესაც V პოტენციალის ფუნქციაა, ჩვეულებრივი გაგებით, მოცემული არ გვაქვს და განზოგადებული ძალები $U(q_j, \dot{q}_j)$ ფუნქციიდან ასეთნაირად მიიღებინან:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (1.58)$$

ამ შემთხვევაში 1.57 ფორმულა კვლავ 1.53 ფორმულიდან მიიღება ლაგრანჟიანიდან, რომელსაც ასეთი სახე აქვს:

$$L = T - U. \quad (1.59)$$

U -ს „განზოგადებული პოტენციალი“ ან „სიჩქარეზე დამოკიდებული პოტენციალი“ ეწოდება. ამგვარი „პოტენციალის“ გამოყენება ყოველთვის შესაძლებელი არ არის. ის მხოლოდ მუხტებზე მოქმედი ელექტრომაგნიტური ძალების შემთხვევაში არის გამოსადეგი და ამავე დროს საკმაოდ მნიშვნელოვანი ცნებაა.

განვიხილოთ m მასის მქონე q მუხტი, მოძრავი \vec{v} სიჩქარით, სხვა მხრივ ელექტრულ \vec{E} ველისა და მაგნიტური \vec{B} ველისაგან თავისუფალ გარემოში, რადგან ველები შეიძლება დროსა და მდებარეობაზე იყონ დამოკიდებული. მუხტზე ლორენცის ძალა მოქმედებს:

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]. \quad (1.60)$$

$\mathbf{E}(x,y,z,t)$ და $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ დროისა და მდებარეობის უწყვეტი ფუნქციებია და $\phi(x,y,z,t)$ სკალარული პოტენციალის და $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ ვექტორული პოტენციალის საშუალებით ასე განისაზღვრებიან:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.61a)$$

და

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.61b)$$

მუხტზე მოქმედი ძალა სიჩქარეზე დამოკიდებული პოტენციალური ენერჯიის საშუალებითაც შეგვიძლია გამოვთვალოთ:

$$U = q\phi - q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.62)$$

ამგვარად, ლაგრანჟიანი $L = T - U$ ასეთ სახეს მიიღებს:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.63)$$

ლაგრანჟის განტოლების მხოლოდ x კომპონენტი განვიხილოთ და გვექნება:

$$m\ddot{x} = q\left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - q\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{dA_x}{dt}\right). \quad (1.64)$$

A_x -ის დროით სრულ წარმოებულსა და კერძო წარმოებულს შორის შემდეგი დამოკიდებულებაა:

$$\begin{aligned} \frac{dA_x}{dt} &= \frac{\partial A_x}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A_x \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

1.61b ფორმულა გვაძლევს:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x = v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + v_z \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right).$$

მოცემული გამოსახულებები გავაერთიანოთ, მაშინ x -ის მიმართულებით მოძრაობის განტოლებას მივიღებთ:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = q[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x]. \quad (1.66)$$

კომპონენტების შედარება აჩვენებს, რომ 1.66 და 1.60 ფორმულები იდენტურებია, ხოლო ლორენცის ძალის ფორმულა 1.61 და 1.62 ფორმულებიდან მიიღება.

თუ სისტემაზე მოქმედი ყველა ძალა პოტენციალიდან არ მიიღება, მაშინ ლაგრანჟის განტოლება ასეთი სახით შეიძლება ჩაინეროს:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j,$$

სადაც L , როგორც ზევით, შეიცავს კონსერვატიული ძალების პოტენციალს, ხოლო Q_j ის ძალებია, რომელიც პოტენციალიდან არ მიიღება. ამგვარი მდგომარეობა ხშირად იქმნება, როდესაც ხახუნის ძალები არსებობენ. ხახუნის ძალა ნაწილაკის სიჩქარის პროპორციულია და მისი x კომპონენტია:

$$F_{fx} = -k_x v_x.$$

ასეთი სახის ხახუნის ძალები \mathcal{F} ფუნქციის საშუალებით შეიძლება გამოისახონ. მას **რეილის დისიპაციური ფუნქცია** ეწოდება:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2). \quad (1.67)$$

ჯამი წარმოებს სისტემის ყველა ნაწილაკით. განსაზღვრების თანახმად:

$$F_{fi} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{xi}},$$

მაშასადამე:

$$\mathbf{F}_f = -\nabla_v \mathcal{F}. \quad (1.68)$$

დისიპაციური ფუნქციის ფიზიკური ინტერპრეტაციაც შესაძლებელია. სისტემის მიერ ხახუნის წინააღმდეგ შესრულებული მუშაობა ტოლია:

$$dW_f = -\mathbf{F}_f \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v} dt = (k_x v_x^2 + k_y v_y^2 + k_z v_z^2) dt.$$

აქედან გამომდინარე, $2\mathcal{F}$ არის ხახუნის შედეგად ენერჯის მიღების ტემპი. განზოგადებული ძალის ხახუნის ძალიდან მიღებული კომპონენტი შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_i \mathbf{F}_{fi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \\ &= -\sum \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}, \\ &= -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

კარგი მაგალითია სტოუკის კანონი, რომლის თანახმად, η სიბლანტის გარემოში \mathcal{U} სიჩქარით მოძრავ a რადიუსის სფეროზე $\mathbf{F}_f = -6\pi\eta a\mathbf{v}$ ხახუნის ძალა მოქმედებს. ლაგრანჟის განტოლება მიღევასთან ერთად ასეთ სახეს იღებს:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad (1.70)$$

მოძრაობის განტოლებების მისაღებად L და \mathcal{F} სკალარული ფუნქციები უნდა განისაზღვრონ.

1.6 ლაგრანჟის ფორმულირების გამოყენება

წინა პარაგრაფებში გამოჩნდა, რომ სისტემებში, სადაც შესაძლებელია ლაგრანჟიანის განსაზღვრა, ე. ი, ჰოლონომურ სისტემებში, ჩვეულებრივი ან განზოგადებული პოტენციალისა და მუშაობისგან თავისუფალი ბმებიდან მიიღება, მოძრაობის განტოლებების შედგენის ძალიან მოსახერხებელი მეთოდი არსებობს. ჩვენ მივედით ლაგრანჟიანის ფორმულირებამდე იმისთვის, რომ ამოგვეგდო ბმის ძალები მოძრაობის განტოლებიდან და ამ გზით მივალნიეთ ბევრ სასურველ უპირატესობას.

მოძრაობის განტოლებების საწყისი ფორმის (1.19 ფორმულა) მისაღებად მრავალ ვექტორულ ძალასთან და აჩქარებასთან მოგვიწევს შეხება. ლაგრანჟის მეთოდის საშუალებით კი მხოლოდ T და V სკალარულ ფუნქციებთან გვექნება შეხება, რაც პრობლემის გადაჭრას ამარტივებს.

ლაგრანჟის ფორმულირების შესაბამისი ყველა მექანიკური ამოცანისათვის პირდაპირი, რუტინული პროცედურა არსებობს. თავდაპირველად T -სა და V -ს განზოგადებულ კოორდინატებში ვწერთ, შემდეგ მათგან L გამოგვყავს და 1.57 ფორმულაში ვსვამთ, რათა მოძრაობის განტოლება მივიღოთ.

T და V ფუნქციების დეკარტის კოორდინატებიდან განზოგადებულ კოორდინატებში გადაყვანისთვის გარდაქმნის 1.38 და 1.45¹ ფორმულებს ვიყენებთ. ამგვარად, T ფუნქციისათვის გვექნება:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2.$$

გაშლის შემდეგ T -ს გამოსახულება განზოგადებულ კოორდინატებში იქნება:

$$T = M_0 + \sum_j M_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (1.71)$$

სადაც M_0 , M_j და M_{jk} \mathbf{r} -ის და t -ს და მაშასადამე q -ს და t -ს განსაზღვრული ფუნქციებია.

მართლაც, შედარება გვიცვენებს, რომ:

$$M_0 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2, \quad (1.72)$$

$$M_j = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

და

$$M_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}.$$

მაშასადამე, სისტემის კინეტიკური ენერგია განზოგადებული სიჩქარეების სამი ჰომოგენური ფუნქციის ჯამის სახით შეიძლება გამოისახოს:

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad (1.73)$$

სადაც T_0 განზოგადებულ სიჩქარეებზე დამოკიდებული არ არის, T_1 სიჩქარეების-წრფივია, ხოლო T_2 -კვადრატული. თუ გარდაქმნის ფორმულები დროს ცხადად არ შეიცავენ, მაგალითად როდესაც შეზღუდვები დროზე დამოკიდებულენი არ არიან, მაშინ 1.71 ფორმულის მხოლოდ უკანასკნელი წევრი არ ქრება და T განზოგადებული სიჩქარეების ჰომოგენური და კვადრატული ფუნქციაა.

მოდით ზემოთ აღწერილი პროცედურის მარტივი მაგალითები განვიხილოთ:

- 1) ერთი ნაწილაკის სივრცეში მოძრაობა
 - ა) დეკარტის კოორდინატებში
 - ბ) სიბრტყის პოლარული კოორდინატებში
- 2) ატვუდის მანქანა
- 3) დროზე დამოკიდებული შეზღუდვა - მბრუნავ მავთულზე მოსრიალე ბურთულა

1 (ა) **ერთი ნაწილაკის მოძრაობა დეკარტის კოორდინატებში:** 1.53 ფორმულაში საჭირო განზოგადებული ძალებია F_x , F_y და F_z , მაშინ:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

და მოძრაობის განტოლებებს ასეთი სახე აქვს:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z. \quad (1.74)$$

მაშასადამე, მოძრაობის ნიუტონისეულ განტოლებებს ვუბრუნდებით.

ბ) ერთი ნაწილაკის მოძრაობა სიბრტყის პოლარულ კოორდინატებში: ამჯერად T \dot{r} -ის და θ -ის საშუალებით უნდა გამოვსახოთ. გარდაქმნის 1.38 ფორმულებია:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta.$$

1.46 ფორმულის ანალოგიურად სიჩქარეებია:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta,$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta.$$

$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ კინეტიკური ენერჯია ასეთ სახეს იღებს:

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2]. \quad (1.75)$$

1.75 ფორმულის ალტერნატიული გზით მიღება შეიძლება თუ გავიაზრებთ, რომ სიჩქარის პოლარული კომპონენტები სიბრტყეზე არის $d\vec{r} = \dot{r} r$ -ის გასწვრივ და $r\dot{\theta} r$ -ის პერპენდიკულარული მიმართულების გასწვრივ, რომელიც $\hat{\theta}$ ერთეულოვანი ვექტორით აღინიშნება. აქედან გამომდინარე, პოლარულ კოორდინატებში გამოსახული სიჩქარის კვადრატი არის $\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$. dr დიფერენციალური მდებარეობის ვექტორის გამოსახულებაა

$$d\mathbf{r} = \hat{r}dr + r\hat{\theta}d\theta + \hat{k}dz$$

$d\vec{r}$ დიფერენციალური მდებარეობის ვექტორი $\mathbf{z} = 0$ სიბრტყითაა შემოზღუდული, სადაც \hat{r} და $\hat{\theta}$ არიან ერთეულოვანი ვექტორები შესაბამისად \mathbf{r} -ის და θ -ის მიმართულებით და ამ გამოსახულების საშუალებით განზოგადებული ძალის კომპონენტები ცილინდრულ კოორდინატებში 1.48 ფორმულის დახმარებით შეგვიძლია გამოვთვალოთ,

$$Q_r = \vec{F} \cdot \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta r} = \vec{F} \cdot \hat{r} = F_r$$

$$Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta \theta} = \vec{F} \cdot r\hat{\theta} = rF_\theta$$

ვინაიდან \mathbf{r} -ის წარმოებულნი θ -თი, წარმოებულის განსაზღვრების თანახმად, $\hat{\theta}$ -ის მიმართულების ვექტორია (ნახ 1.6). არსებობს ორი განზოგადებული კოორდინატი და, მაშასადამე, ლაგრანჟის ორი განტოლება. \mathbf{r} -ის ფორმულაში შემავალი წარმოებულებია:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = m\dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r},$$

ხოლო თავად ფორმულაა:

$$m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 = Fr,$$

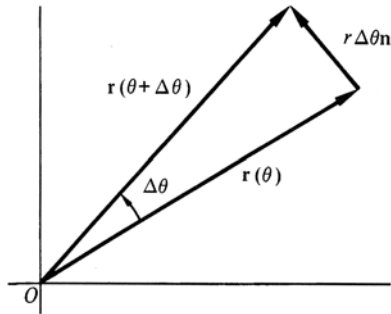
ამ ფორმულის მეორე წევრი ცენტრისკენული აჩქარებაა. θ -ს ფორმულაში შემდეგი წარმოებულები გვხვდება:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta},$$

ხოლო თავად ფორმულაა:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = rF_\theta.$$

ყურადღება მიაქციეთ, რომ ფორმულის მარცხენა მხარე კუთხური მომენტის დროით წარმოებულა, ხოლო მარჯვენა მხარე -ძალის მომენტი. მაშასადამე, ჩვენ ძალის მომენტის 1.26 ფორმულა ხელახლა მივიღეთ, სადაც $L = mr^2\dot{\theta}$ და $N^{(e)} = rF_\theta$.



სურ. 1.6. r -ის წარმოებული θ -ით

2. **ატეუდის მანქანა** (ნახ. 1.7.) ჰოლონომული, სკლერონომული ბმის შემცველი კონსერვატიული სისტემის ნიმუშია (ბლოკი ხახუნის და მასის არმქონედ მიიჩნევა). ცხადია, არსებობს მხოლოდ ერთი დამოუკიდებელი x კოორდინატი, ხოლო მეორე ტვირთის მდებარეობას ბმა განსაზღვრავს, რომლის თანახმად, ტვირთებს შორის გაბმული თოკის სიგრძე l -ია. პოტენციური ენერგიაა:

$$V = -M_1gx - M_2g(l - x),$$

ხოლო კინეტიკური ენერგიაა:

$$T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2.$$

ენერგიების გაერთიანების შედეგად ლაგრანჟის ფუნქცია ასეთ სახეს მიიღებს:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2 + M_1gx + M_2g(l - x).$$

მოძრაობის ერთადერთი განტოლება შემდეგ წარმოებულებს შეიცავს:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 - M_2)g,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\dot{x},$$

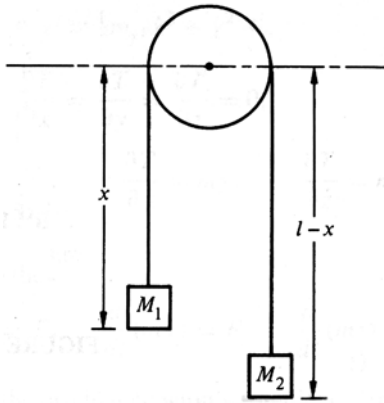
მაშასადამე გვაქვს:

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} = (M_1 - M_2)g,$$

ან

$$\ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}g,$$

იგივე შედეგის მიღება უფრო მარტივად შეიძლებოდა. ტრივიალური ამოცანა ცხადყოფს, რომ ბმის ძალები (ამ შემთხვევაში თოკის დაჭიმულობა) ლაგრანჟის ფორმულირებაში არ ჩანან ანუ ლაგრანჟის მეთოდის საშუალებით თოკის დაჭიმულობას ვერ გამოვთვლით.



ნახ. 1.7. ატვუდის მანქანა

3. თანაბრად მბრუნავ მავთულზე, ძალებისგან თავისუფალ სივრცეში მოსრიალე ბურთულა. მავთული სწორია და რაიმე პერპენდიკულარული ღერძის გარშემო თანაბრად ბრუნავს. მოცემული მაგალითი დროზე დამოკიდებულ ბმას ასახავს, როდესაც ბრუნვის ღერძი Z ღერძის გასწვრივაა მიმართული, ხოლო მავთული xy სიბრტყეში ძევს. გარდაქმნის ფორმულები დროს ცხადად შეიცავენ:

$$x = r \cos \omega t, \quad (\omega = \text{ბრუნვის კუთხური სიჩქარე})$$

$$y = r \sin \omega t. \quad (r = \text{ბრუნვის ღერძიდან მავთულის გასწვრივ მანძილი})$$

ჩვენ შეგვიძლია T (ამ შემთხვევაში ის იგივეა, რაც L) იგივე მეთოდით გამოვთვალოთ, რომლითაც 1.71 ფორმულა მივიღეთ, მაგრამ უფრო მარტივია პირდაპირ 1.75 ფორმულაზე გადავიდეთ და შეზღუდვა $\theta = \omega$ სახით ჩავწეროთ:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2).$$

T განზოგადებული სიჩქარეების ჰომოგენური, კვადრატული ფუნქციაა, ვინაიდან არსებობს წევრი, რომელიც \dot{r} -ს არ შეიცავს. მოძრაობის განტოლება იქნება:

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = 0$$

ან

$$\ddot{r} = r\omega^2,$$

მიღებული ფორმულა ჰარმონიული ოსცილატორის მარტივი განტოლებაა, ოღონდ ნიშანია შეცვლილი. მავთულზე უძრავად მდებარე ბურთულისთვის მიღებული $r = e^{\omega t}$ ამონახსნი ცხადყოფს, რომ ბურთულა ექსპონენციალურად მოძრაობს. იგივე მეთოდით მავთულზე ბურთულის შემაკავებელი შეზღუდვის ძალის გამოთვლა შეუძლებელია. $L = mr^2\omega = m\omega r_0^2 e^{\omega t}$ კუთხურ იმპულსთან ერთად 1.26 ფორმულა $F = 2mr_0\omega^2 e^{\omega t}$ ძალას გვაძლევს, რომელიც თავის მხრივ მავთულისა და ბრუნვის ღერძისადმი პერპენდიკულარულად მოქმედ $F = 2mr_0\omega^2 e^{\omega t}$ ბმის ძალას წარმოქმნის.

სავარჯიშოები

1. დაამტკიცეთ, რომ თანაბარი მასის ნივთიერი წერტილის მოძრაობის განტოლება კინეტიკური ენერჯისთვის შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას გულისხმობს:

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v},$$

ხოლო თუ მასა დროში იცვლება, მაშინ შესაბამისი განტოლებაა:

$$\frac{d(mT)}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{p}.$$

2. დაამტკიცეთ, რომ მასათა ცენტრის მდებარეობის ვექტორის სიდიდე R რაიმე პირობითი ათვლის სათავიდან შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$M^2 R^2 = M \sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} m_i m_j r_{ij}^2.$$

3. დავუშვათ, ორი ნაწილაკების შემდგარი სისტემა მოძრაობის 1.22 და 1.26 განტოლებებს ექვემდებარება. ცალკეული ნაწილაკებს მოძრაობის განტოლებების მიხედვით აჩვენეთ, რომ ნაწილაკებს შორის მოქმედი ძალები ქმედების და უკუქმედების სუსტ და

მკაცრ კანონს აკმაყოფილებენ.

მოყვანილი არგუმენტი ნებისმიერი რაოდენობის ნაწილაკებისაგან შემდგარი სისტემისთვის შეგვიძლია განვაზოგადოთ, რაც თავის მხრივ 1.22 და 1.26 ფორმულებამდე მიმყვანი არგუმენტების მართებულობას ამტკიცებს.

4. მგორავი დისკოს ბმის 1.39 განტოლებები შემდეგი სახის ბმების ზოგადი, წრფივი, დიფერენციალური განტოლებების განსაკუთრებული შემთხვევებია:

$$\sum_{i=1}^n g_i(x_1, \dots, x_n) dx_i = 0.$$

შეზღუდვის პირობა ჰოლონომიურია, თუ ზუსტ დიფერენციალში გარდამავალი ინტეგრების $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქცია არსებობს. როდესაც $i \neq j$, ეს ფუნქცია უნდა იყოს:

$$\frac{\partial(fg_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(fg_j)}{\partial x_i}$$

დაამტკიცეთ, რომ 1.39 განტოლებებისთვის ინტეგრების ამგვარი კოეფიციენტი არ არსებობს.

5. a რადიუსის ორი ბორბალი b სიგრძის საერთო ღერძის ბოლოებზე არის დამაგრებული და დამოუკიდებლად ბრუნავს. მთელი ეს მოწყობილობა სიბრტყეზე სრიალის გარეშე გორავს. დაამტკიცეთ, რომ ბმის ორი არაჰოლონომიური განტოლება არსებობს:

$$\begin{aligned} \cos \theta dx + \sin \theta dy &= 0 \\ \sin \theta dx - \cos \theta dy &= \frac{1}{2} a(d\phi + d\phi'), \end{aligned}$$

(სადაც θ , ϕ და ϕ' ერთი ვერტიკალური დისკოს ამოცანის ანალოგიურებია, ხოლო (x, y) ორ ბორბალს შორის ღერძის შუა წერტილის კოორდინატებია). ასევე არსებობს შეზღუდვის ერთი ჰოლონომიური განტოლება:

$$\theta = C - \frac{a}{b}(\phi - \phi'),$$

სადაც C მუდმივაა.

6. ნაწილაკი xy სიბრტყეში მოძრაობს და მისი სიჩქარის ვექტორი ყოველთვის x ღერძზე მდებარე წერტილისკენაა მიმართული, რომლის აბსცისა დროის რაიმე $f(t)$ ფუნქციაა. დაამტკიცეთ, რომ დიფერენცირებადი, მაგრამ პირობითი $f(t)$ ფუნქციისთვის შეზღუდვა არაჰოლონომიურია.

7. დაამტკიცეთ, რომ 1.53 ფორმულის სახით ჩანერილი ლაგრანჟის განტოლებები ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j} - 2 \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

ამ ფორმულებს ხშირად ლაგრანჟის განტოლებების **ნილსენის** ფორმას უწოდებენ.

8. თუ n თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია ლაგრანჟის განტოლებებს აკმაყოფილებს, პირდაპირი ჩასმის ხერხით დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი ფორმულა ასევე აკმაყოფილებს ლაგრანჟის განტოლებებს:

$$L' = L + \frac{dF(q_1, \dots, q_n, t)}{dt}$$

სადაც F არის საკუთარი არგუმენტების პირობითი, მაგრამ დიფერენცირებადი ფუნქცია.

9. ელექტრომაგნიტური ველი შემდეგი ფორმულებით მოცემული სკალარული და ვექტორული პოტენციალის ყალიბური გარდაქმნის პირობებში მუდმივია:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi(\mathbf{r}, t),$$

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial\psi}{\partial t},$$

სადაც ψ არის ნებისმიერი (მაგრამ დიფერენცირებადი). რა ზემოქმედებას ახდენს ყალიბები გარდაქმნა ელექტრომაგნიტური ველში მოძრავი ნივთიერი ნერტილის ლაგრანჟის ფუნქციაზე? ხდება თუ არა ზემოქმედება ნანილაკის მოძრაობაზე?

10. დავუშვათ, q_1, \dots, q_n n თავისუფლების ხარისხის და $L(q, \dot{q}, t)$ ლაგრანჟის ფუნქციის მქონე სისტემის განზოგადებული დამოუკიდებელი კოორდინატების სიმრავლეა. შემდეგ კოორდინატთა ეს სიმრავლე ქვემოთ მოცემული გარდაქმნის ფორმულების საშუალებით დამოუკიდებელ კოორდინატთა ახალ s_1, \dots, s_n სიმრავლეში გადაგვყავს:

$$q_i = q_i(s_1, \dots, s_n, t), \quad i = 1, \dots, n.$$

(ამგვარ გარდაქმნას **ნერტილოვანი გარდაქმნა** ეწოდება). დაამტკიცეთ, რომ თუ ლაგრანჟის ფუნქცია გარდაქმნის ფორმულებში s_j, \dot{s}_j და t ფუნქციის სახით გამოისახება, მაშინ ლაგრანჟის განტოლებებს s კოორდინატებით აკმაყოფილებს:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0.$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ლაგრანჟის განტოლებების ფორმა ნერტილოვანი გარდაქმნის შედეგად არ იცვლება.

ამოსახები

11. განვიხილოთ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე სრიალის გარეშე მგორავი ერთგვაროვანი დისკო. დისკოს ცენტრზე დისკოს სიბრტყის პარალელურად მიმართული, ჰორიზონტალური ძალა მოქმედებს.

- ა) გამოიყვანეთ ლაგრანჟის განტოლებები და განზოგადებული ძალა გამოთვალეთ.
- ბ) განიხილეთ დისკოს მოძრაობა თუ ძალა დისკოს სიბრტყის პარალელურად არ მოქმედებს.

12. ნაწილაკის **თავის დაღწევის სიჩქარე** დედამიწაზე არის ის მინიმალური სიჩქარე, რომელიც დედამიწის ზედაპირზე უნდა მივანიჭოთ სხეულს, რომ მან თავი არ დააღწიოს დედამიწის გრავიტაციულ ველს. თუ ატმოსფერულ წინააღმდეგობას უგულვებელყოფთ, სისტემა კონსერვატიულია.

პოტენციალური და კინეტიკური ენერგიების მუდმივობის კანონიდან გამომდინარე დაამტკიცეთ, რომ მთვარის არარსებობის შემთხვევაში დედამიწიდან თავის დაღწევის სიჩქარე $11,2 \text{ კმ/წმ}$ იქნება.

13. რაკეტას წინ მისი უკანა ნაწილიდან გამოსროლილი გამონაბოლქვი აირების იმპულსი უბიძგებს. ვინაიდან აირების წარმოშობა რაკეტის სანვავში მომხდარ რეაქციებს უკავშირდება, რაკეტის მასა მუდმივი არ არის და სანვავის კლებასთან ერთად მცირდება.

დაამტკიცეთ, რომ ერთგვაროვან მიზიდულობის ველში ვერტიკალურად მაღლა ასროლილი რაკეტის მოძრაობის განტოლება (ატმოსფერული ხახუნის უგულვებელყოფით) არის:

$$m \frac{dv}{dt} = -v' \frac{dm}{dt} - mg,$$

სადაც m არის რაკეტის მასა, ხოლო v' - გამოსროლილი აირების სიჩქარე რაკეტის მიმართ. ამ ფორმულის ინტეგრების შედეგად v -ს m -ზე დამოკიდებულების ფუნქცია მიიღეთ და მასის დაკარგვის ტემპი მუდმივად მიიჩნიეთ. დაამტკიცეთ, რომ თუ რაკეტა თავდაპირველად უძრავია, $v'=2,1 \text{ კმ/წმ}$ და წამში სანყისი მასის $1/60$ იკარგება, მაშინ თავის დარწმუნების სიჩქარის მისაღწევად სანვავის წონის შეფარდება ცარიელი რაკეტის წონასთან თითქმის 300-ის ტოლი უნდა იყოს.

14. m მასის ორი ნერტილი l სიგრძის ხისტი და უწონო ძელაკითაა გადაბმული. ძელაკის ცენტრი a რადიუსის წრეზე ბრუნავს. კინეტიკური ენერგია განზოგადებულ კოორდინატებში გამოსახეთ.

15. ნაწილაკი ძალის მოქმედების შედეგად სივრცეში მოძრაობს. მოდებული ძალა შემდეგი ფორმის განზოგადებული პოტენციალიდან მიიღება:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = V(r) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L},$$

სადაც \mathbf{r} არის რადიუს-ვექტორი ფიქსირებული წერტილიდან, \mathbf{L} - კუთხური მომენტი ამ წერტილის მიმართ და $\boldsymbol{\sigma}$ - ფიქსირებული ვექტორი სივრცეში.

- ა) ნაწილაკზე მოქმედი ძალის კომპონენტები 1.58 ფორმულაზე დაყრდნობით დეკარტის და სფერულ პოლარულ კოორდინატებში გამოთვალეთ.
- ბ) დაამტკიცეთ, რომ ორივე კოორდინატთა სისტემაში მოცემული კომპონენტები ერთმანეთს 1.49 ფორმულის მსგავსად უკავშირდებიან.
- გ) მოძრაობის განტოლებები სფერულ პოლარულ კოორდინატებში მიიღეთ.

16. ნაწილაკი ძალის მოქმედების შედეგად სიბრტყეში მოძრაობს. მოდებული ძალა შემდეგი სიდიდის ძალის ცენტრისკენ მოქმედებს:

$$F = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2\ddot{r}r}{c^2} \right),$$

სადაც r არის ნაწილაკსა და ძალის ცენტრს შორის მანძილი. გამოთვალეთ განზოგადებული პოტენციალი, რომელიც ამგვარი ძალის წარმოშობას გამოიწვევს და სიბრტყეში მოძრაობისთვის ლაგრანჟის ფუნქცია შეადგინეთ.

17. უძრავი ბირთვი რადიოაქტიულად იშლება და $1,73 \text{ ევ}/c$ იმპულსის ელექტრონს და ელექტრონის მიმართულებიდან მართი კუთხით მოძრავ, $1 \text{ ევ}/c$ იმპულსის ნეიტრინოს გამოასხივებს. ეV (მილიონი ელექტრონ-ვოლტი) თანამედროვე ფიზიკაში ენერჯის ერთეულია და 1.60×10^{-13} ჟ-ის ტოლია. $\text{ევ}/c$ იმპულსის ერთეულია და 5.34×10^{-22} კგ·მ/წმ-ის ტოლია. რა მიმართულებით გადაადგილდება ბირთვი? რა იმპულსი აქვს აქვს $\text{ევ}/c$ -ებში? თუ ნარჩენი ბირთვის მასაა 3.90×10^{-25} კგ, რა კინეტიკური ენერჯია აქვს მას ელექტრონ-ვოლტებში?

18. გარკვეული ფიზიკური სისტემის ლაგრანჟის ფუნქციაა:

$$L' = \frac{m}{2}(ax^2 + 2\dot{x}\dot{y} + cy^2) - \frac{K}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2),$$

სადაც a , b და c პირობითი მუდმივებია და $b^2 - ac \neq 0$. დაადგინეთ მოძრაობის განტოლებები. შეამოწმეთ ორი შემთხვევა, როდესაც $a = 0 = c$ და $b = 0$, $c = -a$. რა ფიზიკურ სისტემას აღწერს ზემოთ მოყვანილი ლაგრანჟის ფუნქცია? დაამტკიცეთ, რომ ამ სისტემისთვის 1.56 ფორმულით განსაზღვრული ჩვეულებრივი ლაგრანჟის ფუნქცია L' -ს წერტილოვანი გარდაქმნის საშუალებით უკავშირდება. რა გავლენას ახდენს მდგომარეობა $b^2 - ac$ -ს მნიშვნელობაზე?

19. მიიღეთ სფერული ქანქარის მოძრაობის ლაგრანჟის განტოლებები. სფერული ქანქარა ხისტ, უწონო ძელაკზე ჩამოკიდებული ნაწილაკია.

20. m მასის ნივთიერი წერტილი ერთ განზომილებაში მოძრაობს და მისი ლაგრანჟის ფუნქციაა:

$$L = \frac{m^2 x^4}{12} + m\dot{x}V(x) - V^2(x),$$

სადაც V არის x -ის რაიმე წარმოებადი ფუნქცია. მიიღეთ მოძრაობის განტოლება $x(t)$ -სთვის და ამ განტოლებაზე დაყრდნობით სისტემის ფიზიკური ბუნება აღწერეთ.

21. m_1 და m_2 მასის მქონე ორინაწილაკი მაგიდის ხვრელში გამავალი თოკითაა გადაბმული. m_1 მასის წერტილი მაგიდის ზედაპირზე დევს, ხოლო m_2 მასის წერტილი ჩამოკიდებულია. დავეუშვათ, m_2 მხოლოდ ვერტიკალურ წრფეზე მოძრაობს.

რა განზოგადებული კოორდინატები აქვს სისტემას? ამ სისტემისთვის ლაგრანჟის განტოლებები დაწერეთ და თუ შესაძლებელია ნებისმიერი მათგანის ფიზიკურ მნიშვნელობაზე იმსჯელეთ. ამოცანა მეორე რიგის ერთ დიფერენციალურ განტოლებამდე დაიყვანეთ და განტოლების პირველი ინტეგრალი მიიღეთ. რა ფიზიკური მნიშვნელობა აქვს მას? (მოძრაობა m_1 წერტილის ხვრელამდე მისვლამდე განიხილეთ).

22. 1.4 სურათზე გამოსახული ორმაგი ქანქარისთვის ლაგრანჟის ფუნქცია და მოძრაობის განტოლებები დაწერეთ. ქანქარის სიგრძეებია l_1 და l_2 , ხოლო შესაბამისი მასებია m_1 და m_2 .

23. მიზიდულობის ძალის შედეგად ვერტიკალურად ვარდნილი ნაწილაკის მოძრაობის განტოლება დაწერეთ, როდესაც დისიპაციის $\frac{1}{2}kV^2$ ფუნქციიდან მიღებული ხახუნის ძალები არსებობენ.

განტოლება აინტეგრეთ და სიჩქარის დროზე დამოკიდებულების ფუნქცია მიიღეთ. დაამტკიცეთ, რომ ვარდნის დროს მაქსიმალური შესაძლო სიჩქარეა $v = mg/k$.

24. L_a სიგრძის ზამბარა ერთი ბოლოთი საყრდენზეა მიმაგრებული, ხოლო მის მეორე ბოლოზე M მასის ტვირთი კიდია. ზამბარის მასა და M მასის განზომილება უგულვებელყავით. დაუშვით, რომ მოძრაობა ვერტიკალურ სიბრტყეში ხდება, ზამბარა მხოლოდ იჭიმება, არ იზნიკება და სიბრტყეში ქანაობა შეუძლია.

- ა) მასის ვერტიკალისადმი კუთხური გადაადგილების და ზამბარის დაჭიმვის მანძილის გამოყენებით ლაგრანჟის განტოლებები დაწერეთ.
- ბ) ეს განტოლებები მცირე დაჭიმვისა და კუთხური გადაადგილებებისთვის ამოხსენით
- გ) ა) ნაწილში მიღებული განტოლებები გაჭიმვისა და კუთხური გადაადგილებისთვის შემდეგ რიგში ამოხსენით. ეს ნაწილი შეიძლება ხელით დაითვალოს ზამბარის სიხისტედ, მასად და სიგრძედ რაიმე დასაშვები მნიშვნელობა მიიჩნიეთ და მოძრაობა განიხილეთ. მოსალოდნელია თუ არა რეზონანსი ამოცანაში შემოღებული დაშვებების პირობებში?
- დ) (ანალიტიკური კომპიუტერული პროგრამებისთვის) დავეუშვათ, ზამბარას $m \ll M$ მთლიანი მასა აქვს. ზამბარის გადაღუნვის შესაძლებლობა უგულვებ-

ლყავით და ზუსტად დაწერეთ ლაგრანჟის განტოლებები მ-ით პირველ რიგში. იპოვეთ აგრეთვე კუთხური და წრფივი გადაადგილებები.

- ე) (რიცხოზრივი კომპიუტერული ანალიზისთვის). . ა) ნაწილში მოყვანილ მუდმივებს რაიმე დასაშვები მნიშვნელობები მიანიჭეთ და ორი კოორდინატის დროზე დამოკიდებულების ფუნქციების ერთიანი გრაფიკი ააგეთ.

პარიაციული პრინციპი და ლაგრანჟის განტოლებები

2.1 ჰამილტონის პრინციპი

პირველ თავში ლაგრანჟის განტოლებების გამოყვანა სისტემის მყისიერი მდგომარეობის და ამ მდგომარეობიდან მცირე შესაძლო გადაადგილებების ანუ „დიფერენციალური პრინციპის“ - დ'ალემბერის პრინციპის - განხილვით დავიწყეთ. ლაგრანჟის განტოლებების მიღება t_1 და t_2 დროს შორის სისტემის მთლიანი მოძრაობის და რეალური მოძრაობიდან მცირე შესაძლო გადახრის განხილვის საშუალებითაც შეიძლება. ამგვარ მეთოდს „ინტეგრალური პრინციპი“ ეწოდება.

ვიდრე ინტეგრალურ პრინციპს შევხებოდეთ, გამონათქვამი „ t_1 და t_2 დროს შორის სისტემის მოძრაობა“ უფრო ზუსტად უნდა ავხსნათ. სისტემის მყისიერი კონფიგურაცია n რაოდენობის q_1, \dots, q_n განზოგადებული კოორდინატების n მნიშვნელობებით აღინერება და ის დეკარტის ჰიპერსივრცის გარკვეულ წერტილს შეესაბამება, სადაც q -ები n კოორდინატა ღერძებს ქმნიან. ამ n განზომილების მქონე სივრცეს კონფიგურაციული სივრცე ეწოდება. დროის სვლასთან ერთად სისტემის მდგომარეობა იცვლება და სისტემის წერტილი კონფიგურაციულ სივრცეში მრუდი ტრაექტორიით მოძრაობს, რომელსაც „სისტემის მოძრაობის ტრაექტორია“ ეწოდება. „სისტემის მოძრაობა“ **კონფიგურაციულ სივრცეში** სისტემის წერტილის ამგვარი ტრაექტორიით მოძრაობას ნიშნავს.

დრო მრუდის პარამეტრად შეგვიძლია მივიჩნიოთ. ტრაექტორიის თითოეულ წერტილს დროის ერთი ან მეტი მნიშვნელობა შეესაბამება. აუცილებელი არ არის კონფიგურაციულ სივრცეს ფიზიკურ, სამგანზომილებიან სივრცესთან კავშირი ჰქონდეს, ისევე როგორც განზოგადებული კოორდინატები მდებარეობის კოორდინატები ყოველთვის არ არიან.

კონფიგურაციულ სივრცეში მოძრაობის ტრაექტორია რეალური ნივთიერი წერტილის სივრცეში მოძრაობის ტრაექტორიას არ წააგავს. ამ ტრაექტორიის თითოეული წერტილი დროის რაიმე მოცემულ მომენტში **მთლიანი** სისტემის კონფიგურაციას ასახავს.

ჰამილტონის ინტეგრალური პრინციპი მექანიკური სისტემის მოძრაობას აღწერს, სადაც ყველა ძალა (გარდა შეზღუდვის ძალებისა) განზოგადებული სკალარული პოტენციალიდან მიიღება. განზოგადებული სკალარული პოტენციალი კოორდინატების, სიჩქარეების და დროის ფუნქცია შეიძლება იყოს. ამგვარ სისტემებს **მონოგენური** ეწოდებათ.

როდესაც პოტენციალი მხოლოდ მდებარეობის კოორდინატების ცხადი ფუნქციაა, მონოგენური სისტემა კონსერვატიულია (იხ. 1.2. პარაგრაფი).

მონოგენური სისტემებისთვის ჰამილტონის პრინციპი ასე ჟღერს:

t_1 და t_2 დროს შორის სისტემა ისე მოძრაობს, რომ შემდეგი წირითი ინტეგრალის (ქმედება ანუ ქმედების ინტეგრალის) მნიშვნელობა, სადაც $L = T - V$, მოძრაობის რეალური ტრაექტორიისთვის სტაციონარულია:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (2.1)$$

სისტემის წერტილი t_1 დროის მდებარეობიდან t_2 დროის მდებარეობაში ისეთი ტრაექტორიით გადაადგილდება, რომლისთვისაც 2.1 ინტეგრალის მნიშვნელობა სტაციონარულია. „სტაციონარულ მნიშვნელობაში“ ვგულისხმობთ, რომ ინტეგრალის მნიშვნელობა მოცემული ტრაექტორიის გასწვრივ ყველა მიმდებარე უსასრულოდ მცირე გადაადგილებებით განსხვავებული ტრაექტორიის გასწვრივ მნიშვნელობის ტოლია პირველი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეების სიზუსტით (სურ. 2.1).

ცნება წირითი ინტეგრალის სტაციონარული მნიშვნელობის შესახებ შეესაბამება ჩვეულებრივ ფუნქციათა თეორიაში პირველი წარმოებულის ნულთან ტოლობას.

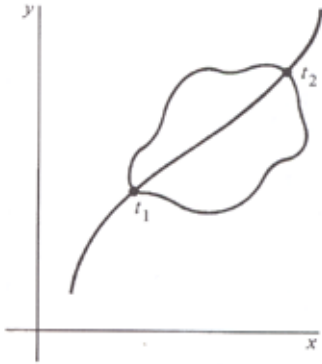
ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ I წირითი ინტეგრალის ვარიაცია ფიქსირებული t_1 და t_2 დროის მომენტებისთვის ნულის ტოლია:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0. \quad (2.2)$$

როდესაც სისტემის შეზღუდვები ჰოლონომიურებია, 2.2 ფორმულით წარმოდგენილი ჰამილტონის პრინციპი ლაგრანჟის განტოლებების მიღების აუცილებელი და საკმარისი პირობაა. მაშასადამე, ჰამილტონის პრინციპი პირდაპირ ლაგრანჟის განტოლებებიდან მიიღება. შეგვიძლია საწინააღმდეგოც დავამტკიცოთ ანუ ლაგრანჟის განტოლებები ჰამილტონის პრინციპიდან მივიღოთ. ჩვენ ასეც მოვიქცევით, ვინაიდან ეს უფრო მნიშვნელოვანი თეორემაა.

ჰამილტონის პრინციპი მოძრაობის განტოლებების მიღების საკმარის პირობას წარმოადგენს, რაც საშუალებას გვაძლევს მონოგენური სისტემის მექანიკა მთლიანად ჰამილტონის პრინციპის საფუძველზე ავაგოთ და არა ნიუტონის მოძრაობის კანონებზე.

ამგვარ მიდგომას თავისი უპირატესობები აქვს. ვინაიდან \int ინტეგრალი L -ის გამოსახვისთვის საჭირო განზოგადებული კოორდინატების სისტემისადმი ინვარიანტულია, მოძრაობის განტოლებებს ყოველთვის ლაგრანჟის ფორმა აქვთ და განზოგადებული კოორდინატების გარდაქმნები ამ ფორმაზე ზეგავლენას არ ახდენენ. უფრო მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ ვარიაციული პრინციპის საფუძველზე აგებული მიდგომა ზოგადად წარმოადგენს იმ გზას, რომელსაც იყენებენ ცხადად არამექანიკური სისტემების კლასიკური მექანიკის მათემატიკური მეთოდებით აღწერისას, როგორც ველების თეორიაში.



სურ. 2.1. სისტემის ნერტილის ტრაექტორია კონფიგურაციულ სივრცეში

2.2 ვარიაციული აღრიცხვის ზოგიერთი მეთოდი

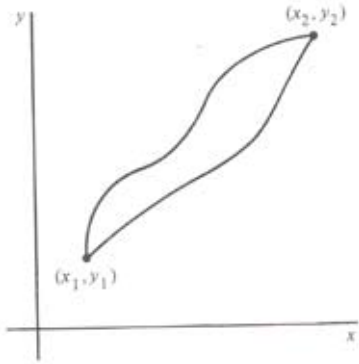
ვიდრე 2.2 ფორმულიდან ლაგრანჟის განტოლებებს მივიღებთ, ვარიაციული აღრიცხვის მეთოდები განვიხილოთ. ამგვარი გამოთვლის უპირველესი ამოცანა ისეთი მრუდის პოვნაა, რომლისთვისაც მოცემულ წირით ინტეგრალს სტაციონარული მნიშვნელობა აქვს.

თავდაპირველად ამოცანა ერთი განზომილებისთვის განვიხილოთ. გვაქვს x_1 და x_2 მნიშვნელობებს შორის $y = y(x)$ ტრაექტორიაზე განსაზღვრული $f(y, y', x)$ ფუნქცია, სადაც y არის y -ის წარმოებული x -ით. ჩვენ განსაკუთრებული $y(x)$ ტრაექტორია უნდა ვიპოვოთ, რომლისთვისაც x_1 -სა და x_2 -ს შორის f ფუნქციის J წირით ინტეგრალს:

$$y \equiv \frac{dy}{dx},$$

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx, \quad (2.3)$$

ამ ნაპოვნი $y(x)$ ფუნქციისგან უსასრულოდ მცირედ განსხვავებული ტრაექტორიებისთვის სტაციონარული მნიშვნელობა ექნება. x ცვლადი t პარამეტრის როლს ასრულებს და ჩვენ მხოლოდ ისეთ ტრაექტორიებს განვიხილავთ, რომელთათვისაც $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. (სურ. 2.2). 2.2 სურათი კონფიგურაციულ სივრცეს არ ასახავს. ერთგანზომილებიან კონფიგურაციულ სივრცეში ნამდვილი და გადახრილი ტრაექტორიები y_1 -ისა და y_2 -ის შემაერთებელი წრფის მონაკვეთებია. ტრაექტორიები ერთმანეთისგან მხოლოდ y -სა და x -ს შორის ფუნქციური დამოკიდებულებით განსხვავდებიან. ამოცანა ერთგანზომილებიანია და y სიდიდე x -ის ფუნქციაა, რომელიც არ წარმოადგენს კოორდინატს.



სურ. 2.2. $y(x)$ ფუნქციის გადახრილი ტრაექტორიები ერთგანზომილებიანი ექსტრემუმის ამოცანაში

ამოცანამ ისეთი ფორმა მიიღო, რომ ფუნქციის სტაციონარული წერტილების პოვნისთვის დიფერენციალური აღრიცხვის კარგად ცნობილი მეთოდები შეგვიძლია გამოვიყენოთ. ნამდვილი ტრაექტორიის შემთხვევაში J -ს ნებისმიერი მიმდებარე ტრაექტორიის მიმართ სტაციონარული მნიშვნელობა უნდა ჰქონდეს, ვარაიაცია უსასრულოდ მცირე α პარამეტრით განსაზღვრული მიმდებარე ტრაექტორიების რაიმე სიმრავლის მიმართ ნულის ტოლი უნდა იყოს. ამგვარი ტრაექტორიების სიმრავლე $y(x, \alpha)$ -ით აღმნიშნოთ, სადაც $y(x, 0)$ ნამდვილი ტრაექტორიაა. მაგალითად, თუ ნებისმიერ $\eta(x)$ ფუნქციას ავირჩევთ, რომელიც $x = x_1$ და $x = x_2$ წერტილებში ნულის ტოლია, მაშინ გადახრილი ტრაექტორიების შესაძლო სიმრავლეა:

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x). \quad (2.4)$$

სიმარტივისთვის მიიჩნევა, რომ $y(x)$ ნამდვილი ტრაექტორია და $\eta(x)$ დამხმარე ფუნქცია x_1 -სა და x_2 -ს შორის უწყვეტი და არასინგულარულია, თანაც ამ ინტერვალში მათი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები უწყვეტებია. მრუდების ნებისმიერი ასეთი პარამეტრული ოჯახისთვის 2.3 ფორმულაში შემავალი J სიდიდე α -ს ფუნქციაც არის:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x) dx, \quad (2.5)$$

და სტაციონარული წერტილის მიღების პირობა ცნობილია:

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0. \quad (2.6)$$

ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ დიფერენცირების შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx. \quad (2.7)$$

განვიხილოთ ამ ფორმულის მეორე ინტეგრალი:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx.$$

ნაწილობითი ინტეგრების შედეგად მივიღებთ:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx. \quad (2.8)$$

ყველა გადახრილმა მრუდმა (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , წერტილებზე უნდა გაიაროს და მაშასადამე y -ის კერძო წარმოებული α -ით x_1 -ში და x_2 -ში ნულის ტოლი იქნება. აქედან გამომდინარე, 2.8 ფორმულის პირველი წევრი ნულის ტოლია და 2.7 ფორმულა ასეთ სახეს იღებს:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx.$$

სტაციონარული მნიშვნელობის პირობა (2.6 ფორმულა) შემდეგი ფორმულის ექვივალენტურია:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_0 dx = 0. \quad (2.9)$$

2.9 ფორმულაში შესული y -ის კერძო წარმოებული α -ით x -ის ნებისმიერი ფუნქციაა, რომელიც უწყვეტია და ბოლო წერტილებში დადებულ პირობებს აკმაყოფილებს. მაგალითად, 2.4 ფორმულით მოცემული გადახრილი ტრაექტორიების პარამეტრული ოჯახისთვის, ეს ფუნქცია $\eta(x)$ ნებისმიერი ფუნქციაა. აქედან გამომდინარე, 2.9 ფორმულისთვის ვარიაციული აღრიცხვის „ფუნდამენტური ლემა“ შეგვიძლია გამოვიყენოთ, რომლის თანახმად, თუ

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x) \eta(x) dx = 0 \quad (2.10)$$

სადაც $\eta(x)$ ნებისმიერი, მეორე წარმოებულის ჩათვლით უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ $M(x)$ ფუნქცია (x_1, x_2) შუალედში იგივეურად უდრის ნულს. ლემის მათემატიკური დამტკიცება შესაძლებელია ვარიაციული აღრიცხვის სახელმძღვანელოებში მოიძებნოს, მაგრამ მისი მართებულობა ინტუიციურადაც აშკარაა.

ჩვენ შეგვიძლია შუალედში შემავალი ნებისმიერი წერტილის უშუალო სიახლოვეზე დადებითი η ფუნქცია ავაგოთ, რომელიც ყველგან სხვაგან ნულის ტოლი იქნება.

2.10 ფორმულა მხოლოდ მაშინ იქნება ჭეშმარიტი, თუ $M(x)$ არჩეულ წერტილში ნულის ტოლი იქნება, რაც ამტკიცებს, რომ სიდიდე შუალედში ნულის ტოლი უნდა იყოს. 2.9 ფორმულიდან და ფუნდამენტური ლემიდან გამომდინარე, J -ს მხოლოდ მაშინ ექნება სტაციონარული მნიშვნელობა, როდესაც:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0. \quad (2.11)$$

2.12 ფორმულა გადახრილი ტრაექტორიის $y(x)$ ნამდვილი ტრაექტორიიდან x ნერტილში უსასრულოდ მცირე გადახრას ასახავს და პირველ თავში შემოტანილ შესაძლო გადაადგილებას (δy -ს) შეესაბამება:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha \equiv \delta y, \quad (2.12)$$

J -ს უსასრულოდ მცირე ვარიაცია ნამდვილი ტრაექტორიის მიმართ არის:

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha} \right)_0 d\alpha \equiv \delta J. \quad (2.13)$$

მტკიცება, რომ J ნამდვილი ტრაექტორიისთვის სტაციონარულია, ასე შეიძლება ჩაინეროს:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \delta y dx = 0,$$

სადაც $y(x)$ 2.11 დიფერენციალურ განტოლებას უნდა აკმაყოფილებდეს. 2.12 და 2.13 ფორმულებში შემოტანილი δ აღნიშვნა ინტეგრალების ვარიაციის ნათლად ჩასანერად შეგვიძლია გამოვიყენოთ. ასევე უნდა გვახსოვდეს, რომ δ გადახრილი ტრაექტორიების პარამეტრულ ოჯახებთან დაკავშირებულ გამოთვლებს განასახიერებს.

ამჯერად 2.11 ფორმულის გამოყენების რამდენიმე მარტივი მაგალითი განვიხილოთ.

1. **უმოკლესი მანძილი სიბრტყის ორ ნერტილს შორის.** სიბრტყეში სიგრძის ელემენტია:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

1 და 2 ნერტილებს შორის გავლებული ნებისმიერი მრუდის მთლიანი სიგრძეა:

$$I = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx.$$

მრუდი უმოკლესი ტრაექტორიაა, როდესაც I მინიმალურია. ეს არის 2.3 ფორმულით გამოსახული ექსტრემუმის ამოცანის მაგალითი, სადაც:

$$f = \sqrt{1 + \dot{y}^2}.$$

2.11 ფორმულაში ჩავსვათ: $\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}},$

და მივიღებთ:
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \right) = 0$$

ან
$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = c,$$

სადაც c მუდმივაა. ამონახსნი ვარგისია, თუ

$$y = a,$$

სადაც a არის მუდმივა და c -სთან შემდეგ დამოკიდებულებაშია:

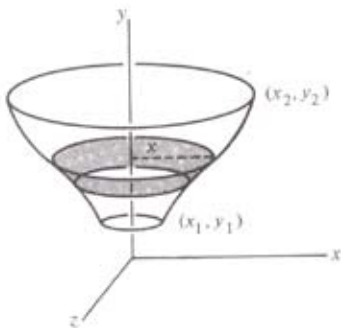
$$a = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}.$$

ეს ფორმულა აშკარად წრფის განტოლებაა:

$$y = ax + b,$$

სადაც b არის ინტეგრების კიდევ ერთი მუდმივა. მაშასადამე დამტკიცდა, რომ წრფე ექსტრემუმის ტრანექტორია და ამგვარი ამოცანის შემთხვევაში მინიმუმიც არის. ინტეგრების a და b მუდმივები განისაზღვრებიან იმ პირობიდან, რომ მრუდი (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ბოლო წერტილებზე უნდა გადაიოდეს.

ასევე შეგვიძლია მივიღოთ სფეროს ორ წერტილს შორის უმცირესი მანძილი, თუ სფეროს ზედაპირზე რკალის სიგრძეს სფეროზე მდებარეობის კოორდინატების კუთხის საშუალებით ჩავწერთ. მოცემული ზედაპირის ორ წერტილს შორის უმცირესი მანძილის მომცემ მრუდებს ზედაპირის **გეოდეზიური წირები** ეწოდებათ.



სურ. 2.3 ა. ბრუნვის მინიმალური ზედაპირი. სურათი ბრუნვის ლერძისადმი ერთი და იგივე ნიშნის მქონე y_1 და y_2 წერტილებისთვისაა აგებული. ზოგად ამონახსნში ამგვარი დაშვება არ გვაქვს.

2. ბრუნვის მინიმალური ზედაპირი. დავუშვათ, xy სიბრტყეში (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილებს შორის რაიმე მრუდის გავლებით და მისი ბრუნვით y ლერძის გარშემო ბრუნვის ზედაპირი შევქმენით (სურ. 2.3.ა).

ჩვენ უნდა დავადგინოთ მრუდი, რომლისთვისაც ზედაპირის ფართობი მინიმალური იქნება. ზედაპირის ზოლის ფართობია $2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} dx$, ხოლო მთლიანი ფართობია:

$$2\pi \int_1^2 x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

ამ ინტეგრალის ექსტრემუმი 2.11 ფორმულით გამოითვლება, სადაც:

$$f = x \sqrt{1 + y'^2}$$

და
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

2.11 ფორმულა ასეთ სახეს იღებს:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0$$

ან

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = a,$$

სადაც a არის ინტეგრების რაიმე მუდმივა და ის x -ის მინიმალურ მნიშვნელობაზე ნაკლებია. ზემოთ მოყვანილი ფორმულა და კოეფიციენტები კვადრატში ავიყვანოთ და მივიღებთ:

$$y'^2 (x^2 - a^2) = a^2,$$

ან განტოლების ამოხსნის შემდეგ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

ამ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y = a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + b = a \operatorname{arc} \cosh \frac{x}{a} + b$$

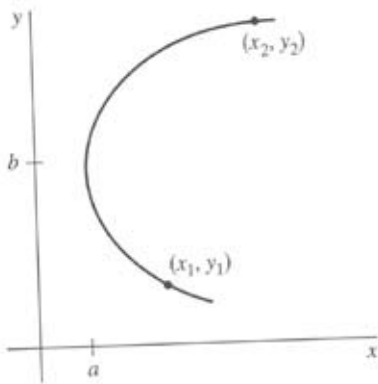
ან

$$x = a \cosh \frac{y - b}{a},$$

მივიღეთ ჯაჭვწირის განტოლება. ინტეგრების a და b მუდმივები განისაზღვრებიან პირობიდან, რომ მრუდი ორ მოცემულ ბოლო წერტილზე გადის, როგორც ეს 2.3ბ სურათზეა ნაჩვენებია.

ზემოთ მოყვანილი განტოლების დამაკმაყოფილებელი მრუდების მასშტაბებია x/a და y/a , ხოლო ერთადერთი დამოუკიდებელი პარამეტრი b/a -ია. როდესაც ამონახს-

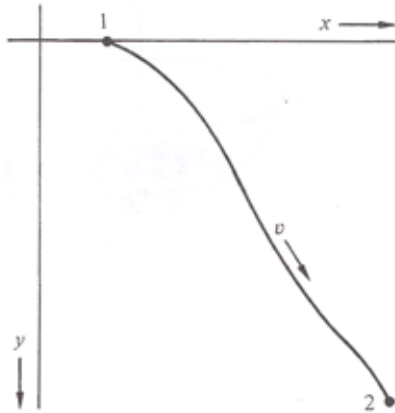
ნებს დეტალურად ვიკვლევთ, ისინი უფრო რთულები აღმოჩნდებიან ხოლმე, ვიდრე ერთი შეხედვით ჩანან. ბოლო წერტილების ზოგიერთი წყვილისთვის შესაძლებელია ერთადერთი a და b მუდმივების მოძებნა, ხოლო ზოგიერთ შემთხვევაში ბოლო წერტილებზე გამავალი ორი სხვადასხვა ჯაჭვნირი გაივლება ან a -ს და b -ს მნიშვნელობების გამოთვლა შეუძლებელია. გარდა ამისა გაიხსენეთ, რომ 2.11 ფორმულა მეორე წარმოებულის ჩათვლით უწყვეტი $y(x)$ მრუდების გამოთვლის პირობაა, რომლებისთვისაც ინტეგრალი სტაციონარულია. ჯაჭვნირის ამონახსნები ყოველთვის არ იძლევიან მინიმალურ მნიშვნელობებს და ზოგჯერ გადალუნვის წერტილებს ასახავენ, სადაც მრუდის სიგრძე სტაციონარულია, მაგრამ არა მინიმალური.



სურ. 2.3.ბ. ჯაჭვნირის ზოგადი ამონახსნი ბრუნვის მინიმალური ზედაპირისთვის

ბოლო წერტილების გარკვეული კომბინაციის დროს (მაგალითად, როდესაც x_1 და x_2 დადებითები და $y_2 - y_1$ -ზე ბევრად მცირეებია), ბრუნვის ზედაპირის აბსოლუტურ მინიმუმს წრფის მონაკვეთებისგან შემდგარი მრუდი წარმოქმნის, რომელიც პირველი ბოლო წერტილიდან x ღერძის პარალელურად y ღერძამდე გადის, შემდეგ y ღერძს $(0, y_2)$ წერტილამდე მიუყვება დაბოლოს კვლავ წრფის სახით მეორე ბოლო წერტილამდე მიდის. მრუდი $\pi(x_1^2 + x_2^2)$ ფართობს შემოწერს. ამგვარი მრუდი მიიღება, როდესაც $a = 0$ ანუ $x = 0$ ან y მუდმივაა. მისი პირველი რიგის წარმოებული უწყვეტია და ამიტომ ეს მრუდი 2.11 ფორმულის ამონახსნი არ იქნება.

მოყვანილი მაგალითი სტაციონარული მდგომარეობის გამოყვანასთან და მის მნიშვნელობასთან დაკავშირებულ შეზღუდვებს კარგად ასახავს. მე-7 და მე-8 ამოცანებში სიმეტრიის პირობებში ნორმიდან გადაახრათ აღწერილი.



სურ. 2.4 ა. ბრაქისტოქრონას ამოცანა

3. **ბრაქისტოქრონას ამოცანა** (სურ. 2.4ა). ამ კარგად ცნობილ ამოცანაში ორი ნერტილის შემაერთებული მრუდი უნდა ვიპოვოთ, რომლის გასწვრივაც გრავიტაციის ზემოქმედების შედეგად ვარდნილი ნივთიერი ნერტილი ზედა ნერტილიდან ქვედა ნერტილამდე უმოკლეს დროში ჩამოდის.

თუ მრუდის გასწვრივ სიჩქარეა v , მაშინ ds სიგრძის რკალის გავლისთვის საჭირო დროა ds/v და ამოცანის ამოხსნისთვის შემდეგი ინტეგრალის მინიმუმი უნდა გამოვთვალოთ:

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v}.$$

თუ y საწყისი ნერტილიდან ქვემოთ აითვლება, მაშინ ნივთიერი ნერტილის ენერჯიის მუდმივობის თეორემა ასე ჩაიწერება:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

ან

$$v = \sqrt{2gy}.$$

t_{12} შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx,$$

ხოლო f :

$$f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}.$$

2.11 ფორმულის f -სთვის ინტეგრება მარტივია.

პარამეტრული ამონახსნი მისი ერთი a პარამეტრის საშუალებით ასე მოიცემა:

სადაც $y_1(x, 0)$, $y_2(x, 0)$, და ა.შ. ექსტრემუმის ამოცანის ამონახსნებია, ხოლო η_1 , η_2 , და ა.შ. x -ის დამოუკიდებელი ფუნქციებია, რომლებიც ბოლო წერტილებში ნულს უდრიან და მეორე რიგის წარმოებულის ჩათვლით უწყვეტნი არიან. სხვა თვალსაზრისით ეს ფუნქციები სრულიად ნებისმიერია.

J -ს ვარიაცია შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx. \quad (2.16)$$

2.16 ფორმულის მეორე ჯამში შესულ ინტეგრალს ნაწილობრივ ვაინტეგრებთ:

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha \partial x} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) dx.$$

პირველი წევრი ნულდება, ვინაიდან ყველა მრუდი ფიქსირებულ ბოლო წერტილებზე გადის. 2.16 ფორმულაში ჩასმის შემდეგ δJ იქნება:

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i dx, \quad (2.17)$$

სადაც 2.12 ფორმულის ანალოგიურად δy_i ვარიაციაა:

$$\delta y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha.$$

ვინაიდან y ცვლადები დამოუკიდებლებია, δy_i ცვლადებიც არ არიან დამოკიდებულნი (ანუ $\eta_i(x)$ ფუნქციები ერთმანეთზე დამოკიდებულნი არ არიან). ფუნდამენტური ლემის (2.10 ფორმულა) მარტივი განრვცობის შედეგად ჩანს, რომ თუ $\delta J = 0$, მაშინ δy_i -ის კოეფიციენტები უნდა განუღდნენ:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.18)$$

2.18 ფორმულები 2.11 ფორმულის რამდენიმე ცვლადზე შესაბამის განზოგადებას წარმოადგენს და მათ *ეილერ-ლავრანის დიფერენციალური განტოლებები* ეწოდებათ. ამ განტოლებების ამონახსნები მრუდებია, რომელთათვისაც 2.14 ფორმით მოცემული ინტეგრალის ვარიაცია ნულდება. ფუნდამენტური ვარიაციული ამოცანის კიდევ უფრო განზოგადება მარტივად ხდება. ჩვენ შეგვიძლია f უფრო მაღალი რიგის წარმოებულების ფუნქციად მივიჩნიოთ, რაც 2.18 ფორმულისგან განსხვავებულ ფორმულებამდე მიგვიყვანს.

ასევე შეგვიძლია f ფუნქცია ისეთ შემთხვევებზე განვაზრცოთ, როდესაც რამდენიმე x_j პარამეტრი არსებობს და ინტეგრალი ჯერადა. ასეთ დროს f ფუნქცია ცვლადების სახით y_i -ის წარმოებულებს ყველა x_j პარამეტრით შეიცავს. და ბოლოს შესაძლებელია ისეთი ვარიაციების განხილვა, როდესაც ბოლო წერტილები ფიქსირებული არ არიან.

ჩვენი მიზნებისთვის საკმარისია, რომ ჰამილტონის პრინციპში შემავალი შემდეგი ინტეგრალი:

$$I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, t) dt, \quad (2.19)$$

ქვემოთ მოყვანილი გარდაქმნების შედეგად 2.14 ფორმულით განსაზღვრულ ფორმას იღებდეს:

$$x \rightarrow t$$

$$y_i \rightarrow q_i$$

$$f(y_i, \dot{y}_i, x) \rightarrow L(q_i, \dot{q}_i, t).$$

2.18 ფორმულების გამოყვანისას დავუშვით, რომ y_i ცვლადები დამოუკიდებელი არიან. ჰამილტონის პრინციპთან დაკავშირებული შესაბამისი პირობის თანახმად q_i განზოგადებული კოორდინატები დამოუკიდებელი უნდა იყვნენ, რაც თავის მხრივ შეზღუდვების ჰოლონომიურობას საჭიროებს. I ინტეგრალის შესაბამისი ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები ლაგრანჟის მოძრაობის განტოლებები ხდებიან:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

მიზანი მიღწეულია და დავამტკიცეთ, რომ ჰოლონომიური შეზღუდვების მქონე მონოგენური სისტემებისთვის ლაგრანჟის განტოლებები ჰამილტონის პრინციპიდან მიიღებიან.

2.4 ჰამილტონის პრინციპის განვრცობა შეზღუდვების მქონე სისტემებზე

1.3 პარაგრაფში, ჰოლონომიურ შეზღუდვებთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნისას ისეთ კოორდინატებს ვირჩევდით, რომ შეზღუდვის 1.37 განტოლებები $0 = 0$ ტრივიალური განტოლებების სიმრავლეს ქმნიდნენ. მოცემულ პარაგრაფში გამოჩნდება თუ როგორ შეიძლება ჰამილტონის პრინციპის გამოყენება ჰოლონომიური შეზღუდვების მქონე სისტემებისთვის და გარკვეული სახეობის არაჰოლონომიური სისტემებისთვის.

თავდაპირველად ჰოლონომიური შეზღუდვები განვიხილოთ. როდესაც ლაგრანჟის განტოლებები ჰამილტონის ან დ'ალემბერის პრინციპიდან გამოგვყავს, ჰოლონომიური შეზღუდვები მხოლოდ უკანასკნელ საფეხურზე ჩნდებიან, როდესაც q_i -ს ვარიაციები ერთმანეთისგან დამოუკიდებლბადად მიიჩნევიან. მიუხედავად ამისა, δq_i -ების შესაძლო გადაადგილებები შეზღუდვებს შესაძლოა არ შეესაბამებოდნენ.

თუ n რაოდენობის ცვლადი და 1.37 ფორმის m რაოდენობის f_α შეზღუდვის განტოლება გვაქვს, მაშინ დამატებითი შესაძლო გადაადგილებები **ლაგრანჟის განუსაზღვრელი მამრავლების** მეთოდით გამოირიცხებიან.

თავდაპირველად 2.19 ფორმულის ინტეგრალი გარდაექმნათ:

$$I = \int_1^2 \left(L + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha f_\alpha \right) dt, \quad (2.20)$$

და ჩავთვალოთ, რომ q_α და λ_α დამოუკიდებლად იცვლებიან, რათა $n + m$ რაოდენობის განტოლება მივიღოთ. λ_α -ს ვარიაციები m რაოდენობის შეზღუდვის განტოლებას გვაძლევენ, ხოლო q_i -ს ვარიაციებიდან გამომდინარეობს:

$$\delta I = \int_1^2 dt \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right) = 0. \quad (2.21)$$

მაგრამ δq_i -ები დამოუკიდებელი არ არიან. λ_α -ები ისე ვირჩევთ, რომ განტოლებების m რაოდენობა ნებისმიერი δq_i -სთვის კმაყოფილდებოდეს, ხოლო შემდეგ δq_i -ის ვარიაციები $n - m$ რაოდენობის დარჩენილ განტოლებებში დამოუკიდებლად ავირჩიოთ. მაშასადამე, შემდეგი ფორმის m რაოდენობის განტოლებას მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_k} - \frac{\delta L}{\delta q_k} + \sum_{\alpha=0}^m \lambda_\alpha \frac{\delta f_\alpha}{\delta q_k} = 0, \quad (2.22)$$

როდესაც $k = 1, \dots, m$. ტოლობა λ_α -ების არჩევანიდან გამომდინარეობს. 2.22 ფორმულის მსგავსი გამოსახულებები $k = m + 1, \dots, n$, შემთხვევაშიც გვაქვს, სადაც ტოლობა δq_i -ების შესაძლო ვარიაციებიდან მიიღება.

სისტემის ამოხსნა m რაოდენობის λ_α ფუნქციის შემოტანის საშუალებით ხდება. როდესაც $k = 1, \dots, n$, 2.22 ფორმულა ასეთი სახით შეიძლება ჩაინეროს:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = - \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} = Q_k, \quad (2.23)$$

სადაც Q_k განზოგადებული ძალებია. Q_k ფუნქციებს ინდივიდუალური შეზღუდვების გამომწვევი ძალების სიდიდეები აქვთ, მაგრამ ვინაიდან 2.22 ფორმულის მესამე წევრის + ნიშანი პირობითად არის არჩეული, ჩვენ შეგვიძლია ამ განზოგადებული ძალების მხოლოდ სიდიდეები განვსაზღვროთ. მათი მიმართულების დასადგენად საჭიროა კონკრეტული სიტუაციის უფრო დეტალური შესწავლა.

მაგალითად, განვიხილოთ a რადიუსის გლუვი ნახევარბირთვი, რომლის ბრტყელი ზედაპირი ქვემოთაა მოქცეული და g გრავიტაციული აჩქარების მქონე დედამიწაზეა მიმაგრებული. შემდეგ M მცირე მასა ნახევარბირთვის წვეროდან უსასრულოდ მცირე

მანძილით მოშორებით მოვათავსოთ, ისე რომ მასა ხახუნის გარეშე ჩამოსრილდეს. ავირჩიოთ ნახევარბირთვის ფუძეზე ცენტრირებული x, y და z კოორდინატები. z ღერძი ვერტიკალური იყოს, ხოლო $x - z$ სიბრტყეში მასის მოძრაობა ხდებოდეს.

დავუშვათ, θ არის წვეროდან მასამდე კუთხე. ლაგრანჟის ფუნქციაა $L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$. სანყისი პირობებიდან გამომდინარე, y კოორდინატი შეგვიძლია უგულებელვყოთ და შეზღუდვის განტოლება იქნება $a - \sqrt{x^2 + z^2} = 0$. ამოცანა $r^2 = x^2 + z^2$ და $x/z = \cos \theta$ საშუალებით გამოვსახოთ და ლაგრანჟის განტოლებები იქნებიან $Ma\ddot{\theta} - Mg \cos \theta + \lambda = 0$ და $Ma^2\ddot{\theta} + Mga \sin \theta = 0$. ჯერ მეორე, ხოლო შემდეგ პირველი განტოლება ამოვხსნათ და მივიღებთ:

$$\ddot{\theta} = -\frac{2g}{a} \cos \theta + \frac{2g}{a} \quad \lambda = Mg(3 \cos \theta - 2).$$

მაშასადამე, λ არის ნივთიერი წერტილის სფეროზე შემაკავებელი ძალის სიდიდე. თუ $\theta = \cos^{-1}(\frac{2}{3})$, მაშინ $\lambda = 0$ და მასა ამ კუთხეზე სფეროს დატოვებს.

არაჰოლონომიული შეზღუდვების ვარიაციული პრინციპის საშუალებით გამოსახვა შეუძლებელია. ერთ-ერთი გამონაკლისი არაჰოლონომიური შეზღუდვაა, როდესაც შეზღუდვა შემდეგი სახის ფუნქციების სიმრავლის საშუალებით შეიძლება ჩაიწეროს:

$$f_\alpha(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) = 0, \quad (2.24)$$

სადაც $\alpha = 1, 2, \dots, m$. 2.24 ფორმულა, როგორც წესი, შეზღუდული სახით გვხვდება:

$$f_\alpha = \sum_{k=1}^n a_{\alpha k} \dot{q}_k + a_0 = 0, \quad (2.25)$$

სადაც f_α არაინტეგრებადი დიფერენციალური გამოსახულებების სიმრავლეა, ხოლო $a_{\alpha k}$ და a_0 სიდიდეები q_i -ის და t -ს ფუნქციებია. ასეთ დროს შეზღუდვების ინტეგრება შეუძლებელია და ამიტომ ცვლადების რაოდენობა განტოლებების რაოდენობაზე მეტია. მიუხედავად ამისა, ვარიაციებს კვლავ უწინდებურად შეგვიძლია მოვეპყროთ, თუ დავწერთ:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \sum_{\alpha=1}^m \mu_\alpha f_\alpha \right) dt = 0, \quad (2.26)$$

სადაც μ სიმბოლო ლაგრანჟის ჰოლონომიური კოეფიციენტებისგან განსხვავებისთვის გამოიყენება. თუ დავუშვებთ, რომ $\mu_\alpha = \mu_\alpha(t)$, შესაძლო გადაადგილებების შედეგად მიღებული განტოლებებია:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k = - \sum_{\alpha=1}^m \mu_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_k}, \quad (2.27)$$

ხოლო $\delta \mu_\alpha$ შეზღუდვის 2.23 განტოლებებს გვაძლევს. განტოლებების ორი სიმრავლე (2.26 და 2.27 ფორმულები) $n + m$ რაოდენობის უცნობისთვის $n + m$ რაოდენობის განტოლებას შეადგენს. აქედან გამომდინარე, ისინი $n + m$ ჰოლონომიური სისტემის ექვივ-

ალენტებად შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, სადაც Q_k განზოგადებული ძალები მოქმედებენ. $\mu_\alpha = \mu_\alpha(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t)$ შემთხვევისათვის განზოგადება მარტივია.

მაგალითად, ნივთიერი ნერტილი განვიხილოთ, რომლის ლაგრანჟის ფუნქციაა:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \quad (2.28)$$

ლაგრანჟის ფუნქცია შემდეგი არაჰოლონომიური შეზღუდვის გავლენის ქვეშაა:

$$f(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z) = xy^2 + xy + kz = 0, \quad (2.29)$$

სადაც k მუდმივაა. შედეგად მიღებული მოძრაობის განტოლებებია:

$$m\ddot{x} + \mu y^2 - \frac{\delta V}{\delta x} = 0, \quad (2.30 \text{ ა})$$

$$m\ddot{y} + \mu x - \frac{\delta V}{\delta y} = 0, \quad (2.30 \text{ ბ})$$

და

$$m\ddot{z} - \frac{\delta V}{\delta z} = 0. \quad (2.30 \text{ გ})$$

ამჯერად ოთხი განტოლება (2.29 და 2.30) ამოვხსნათ და $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, და $\mu(t)$ მამრავლი გამოვთვალოთ.

გამოთვლის დროს უფრო მეტ სასარგებლო ინფორმაციას ვიღებთ, ვიდრე თავდაპირველად მოველოდით, ვინაიდან სასურველ q_k -ებთან ერთად $m\lambda_l$ -ებსაც გამოვთვლით. რა ფიზიკური მნიშვნელობა აქვთ λ_l -ებს? დავუშვათ, სისტემას შეზღუდვები მოვუხსენით, მაგრამ ისეთ გარე Q'_k ძალები მოვდეთ, რომ სისტემის მოძრაობა არ შეცვლილა. მოძრაობის განტოლებები არ იცვლებიან. ცხადია, მოდებული გარე ძალები შეზღუდვის ძალების ტოლები უნდა იყვნენ, ვინაიდან ისინი სისტემაზე ისე მოქმედებენ, რომ შეზღუდვის პირობას აკმაყოფილებენ. Q'_k ძალების მოქმედებისას მოძრაობის განტოლებებია:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k. \quad (2.31)$$

2.31 ფორმულა 2.24 ფორმულის იდენტური უნდა იყოს. აქედან გამომდინარე, 2.25 ფორმულა შეზღუდვის განზოგადებული Q'_k ძალებისაა. ამგვარი ამოცანის ამოხსნისას ფორმულებიდან შეზღუდვის ძალებს ნამდვილად არ გამოორიცხავთ.

ისინი პასუხის შემადგენელი ნაწილებია.

ნახევრადჰოლონომიური სისტემებისთვის მისადაგებული ჰამილტონის პრინციპი საჭიროებს, რომ შეზღუდვებმა წარმოსახვითი გადაადგილებებისას მუშაობა არ შეასრულონ. ეს პირობა ნათლად გამოჩნდება, თუ ჰამილტონის პრინციპს შემდეგი სახით ჩავწერთ:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt = 0. \quad (2.32)$$

თუ ინტეგრალის ვარიაცია განზოგადებული პოტენციალით 2.3 პარაგრაფში აღწერილი მეთოდით ხდება, ჰამილტონის პრინციპი შემდეგ სახეს იღებს:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k dt; \quad (2.33)$$

ან 1.58 ფორმულის დახმარებით ჰამილტონის პრინციპი ასეც შეიძლება ჩაინეროს:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_k Q_k \delta q_k dt. \quad (2.34)$$

ჰამილტონის პრინციპის თანახმად, კინეტიკური ენერჯიის დროით ინტეგრალის ორ მიმდებარე ტრაექტორიას შორის სხვაობა ტრაექტორიებს შორის წარმოსახვითი გადაადგილებისას შესრულებული მუშაობის დროით ინტეგრალის ტოლია საპირისპირო ნიშნით. განხილულ მუშაობას მხოლოდ განზოგადებული პოტენციალიდან მიღებადი ძალები ასრულებენ.

ჰამილტონის იგივე პრინციპი ჰოლონომიურ და ნახევრადჰოლონომიურ სისტემებში მოქმედებს, ოღონდ ნახევრადჰოლონომიური შეზღუდვის დამატებითი ძალები δq_k გადაადგილებებზე მუშაობას არ უნდა ასრულებდნენ.

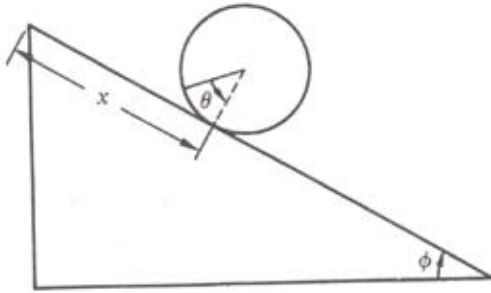
ეს პირობა უფრო ადრე მოყვანილ პირობას მოგვაგონებს, რომლის თანახმად, ჰოლონომიური შეზღუდვის ძალების მიერ შესრულებული წარმოსახვითი მუშაობა ნულის ტოლი უნდა იყოს (იხ. პარაგრაფი 1.4) და ნაკლებად უშლის ხელს ამოცანების ამოხსნას, ვინაიდან ნახევრადჰოლონომიური შეზღუდვები ძირითადად სრიალის გარეშე გორვისას გვხვდებიან, როდესაც შეზღუდვები მუშაობას არ ასრულებენ.

2.20 ფორმულა არაჰოლონომიური შეზღუდვის ყველაზე ზოგადი სახეობა არ არის ანუ ის შეზღუდვის განტოლებებს უტოლობების სახით არ შეიცავს. მეორეს მხრივ, ეს ფორმულა ჰოლონომიურ შეზღუდვებს შეიცავს. შეზღუდვის შემდეგი ჰოლონომიური განტოლება 2.20 ფორმულის ექვივალენტურია, როდესაც \dot{q}_k -ზე დამოკიდებული არ არის:

$$f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = 0, \quad (2.35)$$

აქედან გამომდინარე, ლაგრანჟის მამრავლების მეთოდი ჰოლონომიური შეზღუდვებისთვისაც შეგვიძლია გამოვიყენოთ, როდესაც ყველა q -ების დამოუკიდებელ კოორდინატებამდე დაყვანა არ არის ადვილი ან შეზღუდვის ძალების გამოთვლა გვსურს.

ლაგრანჟის კოეფიციენტების მეთოდის გამოყენების კიდევ ერთი მაგალითი დახრილ სიბრტყეზე სრიალის გარეშე მგორავი ფერსოა. „გორვის“ შეზღუდვა ჰოლონომიურია, მაგრამ ეს ფაქტი ჩვენს განხილვაში მონაწილეობას არ მიიღებს. მეორეს მხრივ, ფერსოს



სურ. 2.5. დახრილ სიბრტყეზე მგორავი ფერსო

დახრილ სიბრტყეზე ყოფნის შეზღუდვა განზოგადებული კოორდინატების არჩევისას არაცხადად იქნება გათვალისწინებული.

2.5 სურათზე ორი განზოგადებული კოორდინატია x და θ , ხოლო გორვის შეზღუდვის განტოლებაა:

$$r d\theta = dx.$$

კინეტიკური ენერგია მასათა ცენტრის მოძრაობის კინეტიკურ ენერგიად და მასათა ცენტრის მიმართ მოძრაობის კინეტიკურ ენერგიად შეიძლება დაიყოს:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2.$$

პოტენციური ენერგია არის:

$$V = Mg(l - x) \sin \phi,$$

სადაც l არის დახრილი სიბრტყის სიგრძე და ლაგრანჟის ფუნქციაა:

$$L = T - V \tag{2.36}$$

$$= \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{Mr^2\dot{\theta}^2}{2} - Mg(l - x) \sin \phi.$$

ვინაიდან შეზღუდვის ერთი განტოლება გვაქვს, ლაგრანჟის მხოლოდ ერთი λ მამრავლი გვჭირდება. შეზღუდვის განტოლებაში შესული კოეფიციენტებია:

$$a_\theta = r, \quad a_x = -1.$$

ლაგრანჟის ორი განტოლებაა:

$$M\ddot{x} - Mg \sin \phi + \lambda = 0, \tag{2.37}$$

$$Mr^2\ddot{\theta} - \lambda r = 0, \tag{2.38}$$

ეს განტოლებები შეზღუდვის 2.39 განტოლებასთან ერთად θ , x და λ უცნობების სამ განტოლებას შეესაბამებინან:

$$r\dot{\theta} = \dot{x}, \quad (2.39)$$

2.39 ფორმულის დროით დიფერენცირება მოგვცემს:

$$r\ddot{\theta} = \ddot{x}.$$

2.38 ფორმულიდან გამომდინარე:

$$M\ddot{x} = \lambda,$$

2.37 ფორმულა ასეთ სახეს იღებს:

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \phi}{2}$$

გარდა ამისა:

$$\lambda = \frac{Mg \sin \phi}{2} \quad \text{და} \quad \ddot{\theta} = \frac{g \sin \phi}{2r}.$$

მაშასადამე, ფერსო დახრილ სიბრტყეზე ხახუნისგან თავისუფალ სიბრტყეზე ჩამოცურების შემთხვევაში განვითარებული აჩქარების მხოლოდ ნახევარს იძენს და შეზღუდვის ხახუნის ძალაა $\lambda = Mg \sin \phi / 2$.

2.5 ვარიაციულ პრინციპზე დაფუძნებული ფორმულირების უპირატესობები

ჰამილტონის პრინციპის საწყისი ფორმულირება (2.2) არაჰოლონომიურ შეზღუდვებზეც შეგვიძლია განვაგრძოთ, მაგრამ ამგვარი ფორმულირება ყველაზე მეტად მოსახერხებელია, როდესაც სისტემისთვის დამოუკიდებელი კოორდინატების ლაგრანჟის ფუნქცია შეიძლება აიგოს. ვარიაციულ პრინციპზე დაფუძნებული ფორმულირება საკმაოდ დახვეწილია, ვინაიდან ჰამილტონის პრინციპში ჰოლონომიური სისტემების მთელი მექანიკა შედის, როდესაც ძალები პოტენციალებიდან მიიღებიან.

ვარიაციულ პრინციპში მხოლოდ ის ფიზიკური სიდიდეები შედიან, რომელთა განსაზღვრა კონკრეტული განზოგადებული კოორდინატების გარეშეც არის შესაძლებელი, კერძოდ კინეტიკური და პოტენციური ენერგიები. შესაბამისად, ამგვარი ფორმულირება ინვარიანტულია სისტემის კოორდინატების არჩევის მიმართ.

ჰამილტონის ვარიაციული პრინციპიდან ასევე ნათელია, თუ რატომ არის ლაგრანჟის ფუნქცია განუსაზღვრელი კოორდინატების და დროის ნებისმიერი ფუნქციის დროით წარმოებულის სიზუსტით, როგორც ეს განხილული იყო 1.4 პარაგრაფის ბოლოში. 1 და 2 წერტილებს შორის ასეთი სრული წარმოებულის ინტეგრალი დროით მხოლოდ რაღაც ფუნქციის ბოლო წერტილებში მნიშვნელობებზეა დამოკიდებული.

რადგანაც ვარიაცია ბოლო წერტილებში ნულის ტოლია, ამიტომ ლაგრანჟის ფუნქციისთვის ნებისმიერი დროით წარმოებულის დამატება ინტეგრალის ვარიაციულ თვისებებს არ ცვლის.

კიდევ ერთი უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ ლაგრანჟის ფუნქციაზე დაფუძნებული ფორმულირება ისეთ სისტემებზე შეგვიძლია განვაზოგადოთ, რომლებიც დინამიკაში ჩვეულებრივ არ განიხილებიან. ამგვარ სისტემებს მიეკუთვნება დრეკადი დეფორმაციების ველი, ელექტრომაგნიტური ველი და ელემენტარული ნაწილაკების ველის მახასიათებლები.

განზოგადების ამ ზოგიერთ მაგალითს მომავალში დავუბრუნდებით, აქ კი განვიხილოთ ვარიაციული პრინციპის მექანიკის ფარგლებს გარეთ გამოყენების სამი მაგალითი: RL წრედი, LC წრედი და ბმული წრედები.

ჩვენს მიერ განხილულ ფიზიკურ სისტემაში V ძაბვის მქონე ბატარეა L ინდუქციურობასთან და R წინააღობასთან მიმდევრობით არის ჩართული. q ელექტრული მუხტი დინამიკური ცვლადია. ინდუქტორი კინეტიკური ენერჯიის სახით მოქმედებს, ვინაიდან ინდუქციურობის ეფექტი მუხტის დროში ცვლილების ტემპზეა დამოკიდებული. რეზისტორი დისიპაციურ წევრს უზრუნველყოფს და პოტენციური ენერჯიაა qV . დისიპაციური წევრის მქონე ლაგრანჟის განტოლებაში 1.70 შემავალი დინამიკური წევრებია:

$$T = \frac{1}{2}L\dot{q}^2, \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2}R\dot{q}^2,$$

პოტენციური ენერჯიაა qV . მოძრაობის განტოლებაა:

$$V = L\ddot{q} + R\dot{q} = L\dot{I} + RI, \tag{2.40}$$

სადაც $I = \dot{q}$ არის ელექტრული დენი. $t = 0$ დროს წრედში ჩართული ბატარეისთვის განტოლების ამონახსნია:

$$I = I_0(1 - e^{-Rt/L}),$$

სადაც $I_0 = V/R$ არის საბოლოოდ დამყარებული ელექტრული დენი.

ამგვარი სისტემის მექანიკური ანალოგია a რადიუსის და m' ეფექტური მასის სფერო, რომელიც თანაბარი სიმკვრივის და η სიბლანტის სითხეში გრავიტაციის ძალის მოქმედების შედეგად ვარდება. ეფექტური მასა რეალურ მასასა და გამოდევნილი სითხის მასას შორის სხვაობაა, ხოლო მოძრაობა y ღერძის პარალელურად ხდება. ამგვარი სისტემის შემთხვევაში:

$$T = \frac{1}{2}m'\dot{y}^2, \quad \mathcal{F} = 3\pi\eta a\dot{y}^2,$$

პოტენციური ენერჯიაა $m'gy$, ხოლო სტოქსის კანონით მოცემული $F_f = 6\pi\eta a\dot{y}$ ხახუნის წინააღობის ძალაა, რომელიც 1.5 პარაგრაფის ბოლოში განვიხილეთ.

მოძრაობის განტოლება ლაგრანჟის განტოლებების (1.70) საშუალებით მოიცემა:

$$m'\ddot{y} = m'g - 6\pi\eta a\dot{y}.$$

გამოვიყენოთ $v = y$ და ამ განტოლების ამონახსნი იქნება (თუ მოძრაობა $t = 0$ დროს იწყება):

$$v = v_0(1 - e^{-t/\tau})$$

სადაც $\tau = m'/(6\pi\eta a)$ არის სფეროსთვის საჭირო დრო, რათა მან $v_0 = m'g/6\pi\eta a$ საბოლოო სიჩქარის $1/e$ ნაწილი შეიძინოს.

ელექტრონრედის კიდევ ერთი მაგალითია C ტევადობასთან მიმდევრობით ჩართული ინდუქციურობა. კონდენსატორი q^2/C პოტენციური ენერჯიის წყაროს სახით მოქმედებს, სადაც q არის ელექტრული მუხტი. ლაგრანჟის ფუნქცია შემდეგ მოძრაობის განტოლებას იძლევა:

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0, \quad (2.41)$$

ამ განტოლების ამონახსნია:

$$q = q_0 \cos \omega_0 t,$$

სადაც q_0 არის $t = 0$ დროის მომენტში კონდენსატორში შენახული მუხტი და ვუშვებთ, რომ ამ მომენტში მუხტი არ მიედინება. სისტემის რეზონანსული სიხშირეა:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

ამგვარი სისტემის მექანიკური ანალოგია $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ ლაგრანჟის ფუნქციით აღწერილი მარტივი ჰარმონიული ოსცილატორი. ლაგრანჟის ფუნქცია მოძრაობის შემდეგ განტოლებას გვაძლევს:

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

იგივე სასაზღვრო პირობებისთვის განტოლების ამონახსნია:

$$x = x_0 \cos \omega_0 t \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

ზემოთ მოყვანილ მაგალითებში მასის ელექტრული ანალოგის - ინდუქციურობის ინერციულობა გამოჩნდა. წინააღმდეგობის ანალოგიურია, ხოლო $1/C$ ტევადობა ჰუკის კანონის ზამბარის სიხისტეა. ასეთ პირობებში 2.6 სურათზე გამოსახული ბმული ელექტრული წრედების ლაგრანჟის ფუნქციაა:

$$L = \frac{1}{2} \sum_j L_j \dot{q}_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{jk \\ j \neq k}} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - \sum_j \frac{q_j^2}{2C_j} + \sum_j e_j(t) q_j,$$

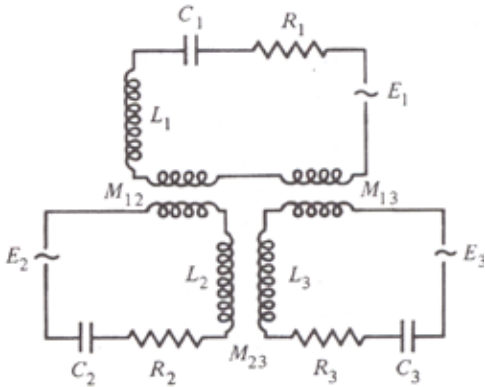
ხოლო გაფანტვის ფუნქციაა:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_j R_j \dot{q}_j^2.$$

სადაც ინდუქტორების ბმის გათვალისწინებისთვის $M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$ ურთიერთინდუქციური ბის წევრებია დამატებული. ლაგრანჟის განტოლებებია:

$$L_j \frac{d^2 q_j}{dt^2} + \sum_{\substack{k \\ j \neq k}} M_{jk} \frac{d^2 q_k}{dt^2} + R_j \frac{dq_j}{dt} + \frac{q_j}{C_j} = E_j(t). \quad (2.42)$$

სადაც $E_j(t)$ -ები გარე ემძ-ებია.



სურ. 2.6 ბმული წრედების სისტემა, რომლისთვისაც ლაგრანჟის ფუნქციაზე დაფუძნებული ფორმულირების გამოყენება შესაძლებელია

ორი სხვადასხვა ფიზიკური სისტემის ერთნაირი ფორმის ლაგრანჟის ფუნქციებით აღწერა მიუთითებს, რომ ერთ-ერთი სისტემის კვლევის დროს შემუშავებული მეთოდები და მიღებული დასკვნები მეორე სისტემაზეც შეგვიძლია განვაზოგადოთ. ამ კერძო შემთხვევაში, ელექტრული წრედების ინტენსიური კვლევების შედეგად რამდენიმე სპეციალური მეთოდი იქნა შემუშავებული, რომლებიც შესაძლებელია პირდაპირ იქნას გამოყენებული შესაბამის მექანიკურ სისტემებშიც.

მექანიკური ან აკუსტიკური სისტემების ექვივალენტური ელექტრული ამოცანების ჩამოყალიბებაზე საკმაოდ დიდი შრომაა განეული. აქამდე მხოლოდ ელექტრული წრედებისთვის გამოყენებული ტერმინები (რეაქტიული წინაღობა, რეაქტიული გამტარობა), დღესდღეობით მექანიკური სისტემების ვიბრაციის თეორიაშიც ხშირად გვხვდებიან.

მექანიკის განზოგადების კიდევ ერთი მაგალითი ექვივალენტობის ოდნავ შესამჩნევ ფორმასთანაა დაკავშირებული. უკვე ვნახეთ, რომ ლაგრანჟის ფუნქცია და ჰამილტონის პრინციპი მოძრაობის მექანიკური განტოლებების მიღების კომპაქტურ ინვარიანტულ მეთოდს გვთავაზობენ.

ამგვარი შესაძლებლობა მხოლოდ მექანიკაზე არ ვრცელდება, ვინაიდან ფიზიკის თითქმის ყველა დარგში ვარიაციული პრინციპების გამოყენების საშუალებით შესაძლებელია „მოძრაობის განტოლებების“ გამოსახვა, იქნება ეს ნიუტონის განტოლებე-

ბი, მაქსველის განტოლებები, თუ შროდინგერის განტოლება.

ამიტომ, როდესაც ფორმულირებას საფუძვლად ვარიაციული პრინციპი უდევს, ყველა ასეთი დარგი გარკვეული ხარისხის **სტრუქტურულ ანალოგიურობას** ავლენს.

თუ ექსპერიმენტების შედეგები ფიზიკის გარკვეული დარგის რომელიმე თეორიის შეცვლის საჭიროებას ამტკიცებენ, დარგების ანალოგიურობა ხშირად გვიჩვენებს როგორ უნდა განხორციელდეს მსგავსი ცვლილებები ფიზიკის რომელიმე სხვა დარგის თეორიაში. ჩვენი საუკუნის დასაწყისში ჩატარებულმა ექსპერიმენტებმა ელექტრომაგნიტური გამოსხივების და ელემენტარული ნაწილაკების დაკვანტვის აუცილებლობა ცხადყო.

დაკვანტვის მეთოდები თავდაპირველად ნაწილაკთა მექანიკისთვის შემუშავდნენ და ყველაფერი კლასიკური მექანიკის ლაგრანჟის ფორმულირებიდან დაიწყო.

ელექტრომაგნიტური ველის ლაგრანჟის ფუნქციით და ჰამილტონის შესაბამისი ვარიაციული პრინციპით აღწერის შედეგად შესაძლებელი ხდება ნაწილაკთა დაკვანტვის მეთოდის გამოყენება კვანტური ელექტროდინამიკის შესაქმნელად (13.5 და 13.6 პარაგრაფები)

2.6 შენახვის თეორემები და სიმეტრიის თვისებები

აქამდე ჩვენ მხოლოდ მოძრაობის განტოლებების მიღებას ვსწავლობდით, მაგრამ კონკრეტული ამოცანისთვის მათი ამოხსნის შესახებ ბევრი არაფერი გვითქვამს. ზოგადად, ამ პრობლემას მათემატიკა აგვარებს. n თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემას დროით მეორე რიგის n რაოდენობის დიფერენციალური განტოლება ექნება.

თითოეული განტოლების ამოხსნას ორი ინტეგრება დაჭირდება, რაც ინტეგრების $2n$ მუდმივას მოგვცემს. ზოგიერთი ამოცანისთვის ამ მუდმივების მნიშვნელობა საწყისი პირობების ანუ nq_j -ების და $n\dot{q}_j$ -ების მნიშვნელობის დახმარებით გამოითვლება.

ზოგჯერ მოძრაობის განტოლებები ცნობილი ფუნქციებით გამოსახვის საშუალებით იქნებიან ინტეგრებადნი, თუმცა ეს ყოველთვის ასე არ იქნება. სინამდვილეში ამოცანების უმრავლესობა არ არის სრულად ინტეგრებადი.

მიუხედავად ამისა, მაშინაც კი, როდესაც სრული ამონახსნების მიღება შეუძლებელია, სისტემის მოძრაობის ფიზიკური ბუნების შესახებ დიდი ოდენობით ინფორმაციას ვიღებთ. ფიზიკოსისთვის ეს ინფორმაცია შეიძლება უფრო საინტერესო იყოს, ვიდრე დროის ფუნქციის სახით მოცემული განზოგადებული კოორდინატების სრული ამონახსნი. ამიტომ მნიშვნელოვანია რა რაოდენობის ინფორმაციის მიღებაა შესაძლებელი მოცემული სისტემის მოძრაობის შესახებ ამოცანის სრული ინტეგრების გარეშე^{1*}.

1 ^{*} ამ და მომდევნო თავებში ვუშვებთ, რომ სისტემის მოძრაობას მთლიანად 2.2 ფორმის ჰამილტონის პრინციპი აღწერს

ბევრ ამოცანაში მოძრაობის განტოლებების პირველი ინტეგრალების რიცხვის მიღება სწრაფად შეიძლება. ამაში ჩვენ ვგულისხმობთ შემდეგი სახის გამოსახულებებს:

$$f(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t) = \text{constant}, \quad (2.43)$$

რომლებიც პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებებს წარმოადგენენ. ინტეგრალები ინტერესის საგანს წარმოადგენენ, ვინაიდან ისინი სისტემის შესახებ ინფორმაციას გვანვდიან. ფაქტიურად ისინი პირველ თავში მიღებულ შენახვის კანონებს მოიცავენ.

მოდით ნივთიერი ნერტილებისგან შემდგარი სისტემა განვიხილოთ, როდესაც მასზე მხოლოდ მდებარეობაზე დამოკიდებული პოტენციალებიდან მიღებული ძალები მოქმედებენ. მაშინ

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &\equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ &= m_i \dot{x}_i = p_{ix}, \end{aligned}$$

რაც \square ნივთიერ ნერტილთან დაკავშირებული იმპულსის x კომპონენტია. მიღებული შედეგი იმპულსის ცნების განზოგადებას გვთავაზობს. q_j კოორდინატთან დაკავშირებული განზოგადებული იმპულსია:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.44)$$

p_j -ს ხშირად უწოდებენ **კანონიკურ იმპულსს** და **შეუღლებულ იმპულსს**. თუ q_j დეკარტის კოორდინატი არ არის, მაშინ სულაც არ არის სავალდებულო, რომ p_j -ს იმპულსის განზომილება ჰქონდეს. გარდა ამისა, თუ პოტენციალი სიჩქარეზეა დამოკიდებული, მაშინ q_j დეკარტის კოორდინატის შემთხვევაშიც კი **განზოგადებული** იმპულსი ჩვეულებრივი **მექანიკური** იმპულსის იდენტური არ იქნება. აქედან გამომდინარე, ელექტრომაგნიტურ ველში მოთავსებული ნივთიერი ნერტილების ჯგუფისთვის ლაგრანჟის ფუნქციაა:

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 - \sum_i q_i \phi(x_i) + \sum_i q_i \mathbf{A}(x_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

(აქ q_i მუხტს აღნიშნავს), ხოლო x_i -ის შეუღლებული განზოგადებული იმპულსია:

$$p_{ix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + q_i A_{x_i}, \quad (2.45)$$

ანუ მექანიკურ იმპულსს პლიუს დამატებითი წევრი.

თუ სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია მოცემულ q_j კოორდინატს არ შეიცავს (თუმცა ის შეიძლება შესაბამის q_j სიჩქარეს შეიცავდეს), მაშინ კოორდინატს **ციკლური** ანუ **იგ-**

ნორირებადი ენოდება. ამგვარი განსაზღვრება უნივერსალური არ არის. მოძრაობის ლაგრანჟის განტოლება

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

ციკლური კოორდინატისთვის შემდეგ სახეს იღებს

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

ანუ

$$\frac{dp_j}{dt} = 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ:

$$p_j = \text{constant.} \quad (2.46)$$

მაშასადამე, შენახვის ზოგადი თეორემა ასე შეგვიძლია ჩამოვაცალიბოთ: **ციკლური კოორდინატის შეუღლებული განზოგადებული იმპულსი მუდმივია.**

2.46 ფორმულის გამოყენებისას დავუშვიტ, რომ q_j განზოგადებული კოორდინატი ყველა სხვა კოორდინატისგან წრფივად დამოუკიდებელია. როდესაც შეზღუდვის განტოლებები არსებობენ, ყველა კოორდინატი წრფივად დამოუკიდებელი არ არის. მაგალიტად, ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე სრიალის გარეშე მგორავი ფერსოს ლაგრანჟის ფუნქციაში θ კუთხური კოორდინატი არ შედის, მაგრამ შეზღუდვის განტოლებაში ნამდვილად გვხვდება: $rd\theta = dx$. შედეგად $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ იმპულსის მომენტი მოძრაობის მუდმივა არ არის.

2.46 ფორმულა მოძრაობის განტოლებებისთვის 2.43 ფორმის პირველ ინტეგრალს წარმოადგენს. მისი გამოყენება ამოცანიდან ციკლური კოორდინატის გამორიცხვისთვის შეიძლება, ხოლო ამოცანა დარჩენილი განზოგადებული კოორდინატების საშუალებით ამოიხსნება.

ამგვარი მეთოდი რაუსმა გამოიგონა და ის ლაგრანჟის ფუნქციის მოდიფიცირებას გულისხმობს. მოდიფიცირების შემდეგ ლაგრანჟის ფუნქცია ციკლური კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული სიჩქარის ფუნქცია აღარ არის და მხოლოდ მის შეუღლებულ იმპულსს შეიცავს. ამის შედეგად p_j სიდიდე ინტეგრების ერთ-ერთ მუდმივად შეგვიძლია მივიჩნიოთ, ხოლო შემდგომი ინტეგრების დროს მხოლოდ არაციკლურ კოორდინატებს გამოვიყენებთ. რაუსის მეთოდის დეტალურად განხილვისგან ჰამილტონის ფორმულირების ჩამოყალიბებამდე თავს ვიკავებთ.

განზოგადებული იმპულსების შენახვისთვის საჭირო პირობები უფრო ზოგადებია, ვიდრე ადრე მიღებული იმპულსის შენახვის ორი თეორემის შემთხვევაში. მაგალიტად, ეს პირობები შენახვის თეორემას ავსებენ იმ შემთხვევაში, როდესაც ქმედების და უკუქ-

მედების კანონი ირღვევა, კერძოდ, როდესაც ელექტრომაგნიტური ძალები არსებობენ.

დავუშვათ, ერთადერთი ნაწილაკი ისეთ ველში მოძრაობს, რომელშიც არც ϕ და არც \mathbf{A} x -ზე დამოკიდებული არ არის. ამ შემთხვევაში x არ ჩნდება L -ში და მაშასადამე ციკლურია. აქედან გამომდინარე, შესაბამისი p_x კანონიკური იმპულსი ინახება. 1.63 ფორმულიდან გამომდინარე, კანონიკური იმპულსია:

$$p_x = m\dot{x} + qA_x = \text{constant.} \quad (2.47)$$

ამ შემთხვევაში $m\dot{x}$ მექანიკური იმპულსი კი არ ინახება, არამედ მისი და qA_x -ის ჯამი 2* . მიუხედავად ამისა, პირველ თავში მოყვანილი შენახვის თეორემები ციკლური კოორდინატების ზოგად წესს უნდა აკმაყოფილებდნენ, ხოლო შესაბამისმა შეზღუდვებმა (2.46) ისინი 1.2 პარაგრაფში მოყვანილ თეორემებამდე უნდა დაიყვანონ.

თავდაპირველად q_j განზოგადებული კოორდინატი განვიხილოთ, რომლის dq_j ცვლილება მთლიანი სისტემის რაიმე მოცემული მიმართულებით გადატანას შეესაბამება. მაგალითად, სისტემის მასათა ცენტრის დეკარტის ერთ-ერთი კოორდინატი ავილოთ. q_j ცხადია T -ში არ შევა, ვინაიდან ათვლის სათავის ძვრა სიჩქარეებზე ზეგავლენას არ ახდენს და T -ის კერძო წარმოებული q_j -ით ნულის ტოლია.

გარდა ამისა, კონსერვატიული სისტემებისთვის ვუშვებთ, რომ V არ არის სიჩქარეების ფუნქცია და ელექტრომაგნიტური ძალების მაგვარ გართულებებს გამოვრიცხავთ. ლაგრანჟის მოძრაობის განტოლება ამგვარად განსაზღვრული კოორდინატისთვის არის:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \equiv \dot{p}_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j. \quad (2.48)$$

ამჯერად დავამტკიცოთ, რომ 2.48 სრული იმპულსის მოძრაობის განტოლებაა, ანუ Q_j სიდიდე ტოლქმედი ძალის კომპონენტია q_j -ს გადატანის მიმართულებით, ხოლო p_j იგივე მიმართულებით სრული იმპულსის კომპონენტია. Q_j განზოგადებული ძალა 1.48 ფორმულით გამოითვლება:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

ვინაიდან dq_j რაიმე ღერძის გასწვრივ სისტემის გადატანას შეესაბამება, $\mathbf{r}_i(q_j)$ და $\mathbf{r}_i(q_j + dq_j)$ ვექტორებს შორის დამოკიდებულება 2.7 სურათზეა გამოსახული. წარმოებულის განსაზღვრებიდან გამომდინარე:

2 [□] კლასიკური ელექტროდინამიკიდან შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ასეთ პირობებში, ანუ როდესაც არც \mathbf{A} და არც ϕ x -ზე დამოკიდებულნი არ არიან, qA_x არის q მუხბთან დაკავშირებული ველის ელექტრომაგნიტური იმპულსის x კომპონენტი.

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{dq_j \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_i(q_j + dq_j) - \mathbf{r}_i(q_j)}{dq_j} = \frac{dq_j}{dq_j} \mathbf{n} = \mathbf{n}, \quad (2.48)$$

სადაც \mathbf{n} არის გადატანის მიმართულების ერთეულოვანი ვექტორი. აქედან გამომდინარე:

$$Q_j = \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F},$$

რაც ტოლქმედი ძალის \mathbf{n} -ის მიმართულებით კომპონენტია (რაც უკვე ვთქვით). იქვე მოყვანილი მეორე მოსაზრების დასამტკიცებლად კინეტიკური ენერგია შემდეგი სახით ჩავწეროთ:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2,$$

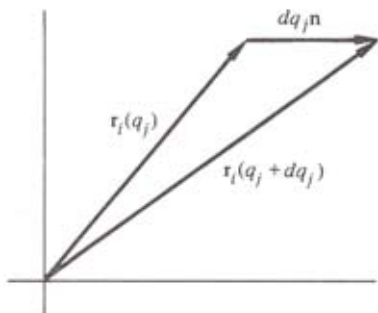
შეუღლებული იმპულსი 1.51 ფორმულიდან გამომდინარე იქნება:

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

2.49 ფორმულიდან გამომდინარე:

$$p_j = \mathbf{n} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_i,$$

რაც სრული იმპულსის \mathbf{n} -ის მიმართულებით კომპონენტია (რაც ასევე ვთქვით).



სურ. 2.7. მდებარეობის ვექტორის ცვლილება სისტემის გადატანისას

დავუშვათ, პარალელური გადატანის q_j კოორდინატი ციკლურია. ამ შემთხვევაში q_j არ შედის V -ში და გვექნება:

$$-\frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j = 0.$$

მივიღეთ იმპულსის შენახვის თეორემა. თუ ტოლქმედი ძალის მოცემული კომპონენტი ნულის ტოლია, იმპულსის შესაბამისი კომპონენტი მუდმივია.

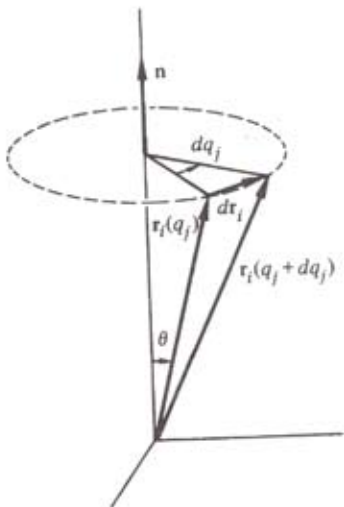
ასევე შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ თუ q_j ციკლური კოორდინატი ისეთია, რომ dq_j შეესაბამება ნივთიერ წერტილთა სისტემის რაიმე ლერძის გარშემო მობრუნებას, მაშინ მისი შეუღლებული იმპულსის მუდმივობა იმპულსის მომენტის მუდმივობას შეესაბამება. ზემოთ გამოყენებული არგუმენტის გამო T არ შეიძლება q_j -ს შეიცავდეს, ვინაიდან კოორდინატთა სისტემის მობრუნება სიჩქარეებზე გავლენას ვერ მოახდენს.

აქედან გამომდინარე, T -ის კერძო წარმოებული q_j -ით კვლავ ნულის ტოლია და რადგან V არ არის q_j -ზე დამოკიდებული, ისევე 2.48 ფორმულას მივიღებთ. ამჯერად გვსურს დავამტკიცოთ, რომ როდესაც q_j ბრუნვითი კოორდინატია, განზოგადებული ძალა ბრუნვის ლერძის მიმართ სრული მახრუნი მომენტის კომპონენტიცაა, ხოლო p_j იგივე ლერძის გასწვრივ სრული იმპულსის მომენტის კომპონენტიცაა.

Q_j განზოგადებული ძალა ისევე იგივე ფორმულით გამოითვლება, მაგრამ წარმოებულს აქ სხვა მნიშვნელობა გააჩნია:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

ამ შემთხვევაში q_j -ს ცვლილება \mathbf{r}_i ვექტორის უსასრულოდ მცირე მობრუნებას უნდა შეესაბამებოდეს, რომლის დროსაც ამ ვექტორის მოდული არ იცვლება. 2.8 სურათიდან გამომდინარე, წარმოებულის მოდული მარტივად გამოითვლება



$$|d\mathbf{r}_i| = r_i \sin \theta dq_j \quad \left| \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right| = r_i \sin \theta,$$

და მისი მიმართულება \mathbf{r}_i -ის და \mathbf{n} -ისადმი პერპენდიკულარულია.

წარმოებული ვექტორული ფორმით ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

სურ. 2.8. მდებარეობის ვექტორის ცვლილება სისტემის მობრუნებისას

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i. \quad (2.50)$$

განზოგადებული ძალაა:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i$$

$$= \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i,$$

ანუ

$$Q_j = \mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{N}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N},$$

რაც ზემოთ მოყვანილი განცხადების პირველ ნაწილს ამტკიცებს. 2.50 ფორმულის საშუალებით p_j -სთან დაკავშირებული გამოთვლები განცხადების მეორე ნაწილსაც ამტკიცებს:

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{n} \cdot \sum_i \mathbf{L}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}.$$

თუ ბრუნვის q_j კოორდინატი ციკლურია, მაშინ მოდებული მახრუნი მომენტის Q_j კომპონენტი \mathbf{n} -ის გასწვრივ ნულის ტოლია და \mathbf{L} -ის კომპონენტი \mathbf{n} -ის გასწვრივ უცვლელია. ამჯერად ციკლურ კოორდინატებთან დაკავშირებული ზოგადი მუდმივობის თეორემიდან იმპულსის მომენტის მუდმივობის თეორემა მივიღეთ.

გადატანითი მოძრაობის ან ბრუნვის ციკლური კოორდინატების მნიშვნელობა სისტემის მახასიათებლების განსაზღვრაში დამატებით განმარტებას საჭიროებს. თუ გადაადგილების შესაბამისი განზოგადებული კოორდინატი ციკლურია, მაშინ მთლიანი სისტემის გადატანა ამოცანაზე ზეგავლენას არ ახდენს. ანუ, თუ სისტემა მოცემული მიმართულებით გადატანისას **ინვარიანტულია**, მაშინ შესაბამისი იმპულსი მუდმივია. თუ ბრუნვითი განზოგადებული კოორდინატი ციკლურია (და ამიტომ შეუღლებული იმპულსის მომენტი მუდმივია), მაშინ სისტემა მოცემული ღერძის გარშემო მობრუნებისას ინვარიანტულია.

აქედან გამომდინარე, იმპულსის და იმპულსის მომენტის მუდმივობის თეორემები სისტემის **სიმეტრიის თვისებებთან** მჭიდრო კავშირში არიან. თუ სისტემა სფერულად სიმეტრიულია, მაშინ კუთხური იმპულსის ყველა კომპონენტი მუდმივია. თუ სისტემა მხოლოდ Z ღერძისადმი სიმეტრიულია, მაშინ მხოლოდ L_z -ია მუდმივი და ასევეა სხვა ღერძების შემთხვევაშიც.

სიმეტრია ხშირად გამოიყენება რთული ამოცანების ამოხსნისას, რათა დადგინდეს არსებობენ თუ არა მოძრაობის გარკვეული მუდმივები (იხ. ნოეთერის თეორემა, 13.7 პარაგრაფი).

დავუშვათ, სისტემა უსასრულო სიბრტყეზე, მაგალითად $z = 0$ სიბრტყეზე თანაბრად განაწილებული ფიქსირებული წყაროებით წარმოქმნილ პოტენციურ ველში მოძრავი ნივთიერი წერტილების სიმრავლისგან შედგება (წყაროები მასის განაწილება შეიძლება იყვნენ, თუ ძალები მიზიდულობისაა, ან მუხტის განაწილება შეიძლება იყვნენ, თუ ძალები ელექტროსტატიკურებია). ამოცანის სიმეტრიიდან გამომდინარე, ლაგრანჟის ფუნქცია ინვარიანტულია ნივთიერ წერტილთა სისტემის x ან y მიმართულებით (და არა z მიმართულებით) პარალელური გადატანის და z ღერძის გარშემო მობრუნების მიმართ.

მაშასადამე, სრული იმპულსის x და y კომპონენტები, სრული იმპულსის მომენტის z კომპონენტთან ერთად მოძრაობის მუდმივებია. თუ წყაროები მხოლოდ ნახევარსიბრტყეზე, ანუ $x \geq 0$, არიან განაწილებულნი, მაშინ x ღერძის გასწვრივ გადატანის და x ღერძის გარშემო მობრუნების მიმართ სიმეტრია დარღვეული იქნება. ამ შემთხვევაში P_x და L_z აღარ არიან მუდმივები, თუმცა P_y კვლავ მოძრაობის მუდმივაა. მომდევნო თავებში მოძრაობის მუდმივებსა და სისტემის სიმეტრიის თვისებებს შორის კავშირს კვლავ დავუბრუნდებით.

2.7 ენერჯის ფუნქცია და ენერჯის მუდმივობა

ლაგრანჟის ფუნქციაზე დაფუძნებულ ფორმულირებაში კიდევ ერთი შენახვის თეორემა მიიღება და ის სისტემის სრული ენერჯის შენახვას შეეხება, როდესაც სისტემაში მოქმედი ძალები მხოლოდ მდებარეობაზე დამოკიდებული პოტენციალებიდან მიიღებიან. განვიხილოთ ლაგრანჟის ზოგადი ფუნქცია, რომელიც q_j კოორდინატების და \dot{q}_j სიჩქარეების ფუნქციაა და ასევე დროზე შეიძლება იყოს ცხადად დამოკიდებული (დროზე ცხადად დამოკიდებულება გარე პოტენციალების დროში ცვლილების ან დროზე დამოკიდებული შეზღუდვების შედეგად ჩნდება). L -ის სრული წარმოებული დროით არის:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.51)$$

ლაგრანჟის განტოლებებიდან გამომდინარე:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right).$$

2.51 ფორმულა ასეც შეიძლება ჩაინეროს:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

ა6

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

აქედან გამომდინარე:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (2.52)$$

ფრჩხილებში ჩასმულ სიდიდეს ხშირად **ენერჯის ფუნქციას**^{3*} უწოდებენ და h სიმბოლოთი აღნიშნავენ:

$$h(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L, \quad (2.53)$$

2.52 ფორმულა გვაძლევს h -ის სრულ წარმოებულს დროით:

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.54)$$

თუ ლაგრანჟის ფუნქცია დროის ცხადი ფუნქცია არ არის ანუ t ცხადად კი არ შედის L -ში, არამედ მხოლოდ არაცხადად q -ს და \dot{q} -ს დროში ცვლილების სახით გვხვდება, მაშინ 2.54 ფორმულის თანახმად, h მუდმივია. მიღებული ინტეგრალი მოძრაობის ერთ-ერთი პირველი ინტეგრალია და ხშირად მას იაკობის ინტეგრალს უწოდებენ^{4*}

ზოგიერთ პირობებში, h ფუნქცია სისტემის სრული ენერჯიაა. ამ პირობების დადგენისთვის გავიხსენოთ, რომ სისტემის სრული კინეტიკური ენერჯია ასეც შეიძლება ჩაინეროს:

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad (1.73)$$

სადაც T_0 არის მხოლოდ განზოგადებული კოორდინატების ფუნქცია, $T_1(q, \dot{q})$ - წრფივი ფუნქცია განზოგადებულ სიჩქარეების მიმართ, ხოლო $T_2(q, \dot{q})$ - q -ების კვადრატული ფუნქცია. მრავალი სახეობის სისტემისთვის და განზოგადებული კოორდინატების სიმრავლისთვის, ლაგრანჟის ფუნქცია q ცვლადებზე დამოკიდებულების მიხედვით შეგვიძლია დავშალოთ:

3 [□] h ენერჯის ფუნქციის მნიშვნელობა H ჰამილტონის ფუნქციის მნიშვნელობის ტოლია (იხ. მე-8 თავი). განსხვავებული სახელი და სიმბოლო მიანიშნებს, რომ h განიხილება, როგორც n რაოდენობის q_j დამოუკიდებელი ცვლადის და მისი q_j დროით წარმოებულების ფუნქცია. ჰამილტონის ფუნქცია $2n$ რაოდენობის q_j , p_j დამოუკიდებელი ცვლადების ფუნქციაა

4 [□] ამგვარი აღნიშვნა სამი სხეულისგან შემდგარი ამოცანის პირველ ინტეგრალზე ვრცელდება. მიუხედავად ამისა, ეს ინტეგრალი h ენერჯის ფუნქციის კერძო შემთხვევაა და არსებობენ ისტორიული პრეცედენტები, როდესაც იაკობის ინტეგრალი უფრო ზოგად ვითარებაში გამოიყენეს.

$$L(q, \dot{q}, t) = L_0(q, t) + L_1(q, \dot{q}, t) + L_2(q, \dot{q}, t). \quad (2.55)$$

L_2 არის მეორე ხარისხის ჰომოგენური ფუნქცია q -ებში, ხოლო L_1 პირველი ხარისხის ჰომოგენური ფუნქციაა q -ებში.

მექანიკაში არ არსებობს მიზეზი, რის გამოც ლაგრანჟის ფუნქცია 2.55 ფორმულას უნდა შეესაბამებოდეს. ლაგრანჟის ფუნქციას ამგვარი ფორმა აქვს, როდესაც ძალები სიჩქარეებისგან დამოუკიდებელი პოტენციალიდან მიიღებიან.

სიჩქარეზე დამოკიდებული პოტენციალების შემთხვევაშიც კი ლაგრანჟის ფუნქცია ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული ნაწილაკისთვის (1.63 ფორმულა) 2.55 ფორმულას აკმაყოფილებს. ამჯერად გავიხსენოთ, რომ ეილერის თეორემის თანახმად, თუ f არის n ხარისხის ჰომოგენური ფუნქცია x_i ცვლადებში, მაშინ:

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf. \quad (2.56)$$

ეს თეორემა 2.55 ფორმულით მოცემული ლაგრანჟის ფუნქციების შემთხვევაში 2.53 ფორმულით მოცემული h ფუნქციისთვის გვაძლევს:

$$h = 2L_2 + L_1 - L = L_2 - L_0. \quad (2.57)$$

თუ განზოგადებული კოორდინატების (1.38 ფორმულები) განმსაზღვრელი გარდაქმნის განტოლებები დროს ცხადად არ შეიცავენ, მაშინ 1.73 ფორმულებიდან გამომდინარე $T = T_2$. თუ პოტენციალი განზოგადებულ სიჩქარეებზე დამოკიდებული არ არის, მაშინ $L_2 = T$ და $L_0 = -V$, ასე რომ:

$$h = T + V = E, \quad (2.58)$$

და ენერჯიის ფუნქცია მართლაც სრული ენერჯიაა. თუ V დროს ცხადად არ შეიცავს, მაშინ L -იც არ შეიცავს დროს ცხადად. მაშასადამე, 2.54 ფორმულიდან გამომდინარე, h (რომელიც ამ შემთხვევაში სრული ენერჯიაა) მუდმივი იქნება.

h -ის მუდმივობისთვის საჭირო პირობები h -ის, როგორც სრული ენერჯიის განმსაზღვრელი პირობებისგან საკმაოდ განსხვავდებიან. ჩვენ შეიძლება განზოგადებულ კოორდინატთა ისეთი სიმრავლე გვექონდეს, რომ გარკვეულ ამოცანაში h მუდმივი იყოს, მაგრამ არ წარმოადგენდეს სრულ ენერჯიას. სხვა შემთხვევებში h შესაძლებელია იყოს $T + U$ ფორმით წარმოდგენილი სრული ენერჯია, მაგრამ მუდმივი არ იყოს.

მართალია ლაგრანჟის ფუნქცია $L = T - U$ წესით ყველა სისტემისთვის ფიქსირებულია და განზოგადებულ კოორდინატებზე დამოკიდებული არ არის, მაგრამ h ფუნქციის მნიშვნელობა და ფორმა განზოგადებული კოორდინატების კონკრეტულ სიმრავლეზეა დამოკიდებული.

ერთი და იგივე სისტემისთვის განსხვავებული ფიზიკური შინაარსის სხვადასხვა h ენერჯიის ფუნქციები შეიძლება მივიღოთ, რომლებიც განზოგადებული კოორდინატების არჩევანზე არიან დამოკიდებულნი.

კლასიკურ მექანიკაში ყველაზე გავრცელებული შემთხვევაა, როდესაც კინეტიკური ენერჯიის წევრები $mq_i^2/2$ ან $p_i^2/2m$ სახით არიან მოცემულნი, ხოლო პოტენციური ენერჯია მხოლოდ კოორდინატებზეა დამოკიდებული. ასეთ დროს ენერჯიის ფუნქცია მუდმივია და ასევე სრული ენერჯიაც არის.

როდესაც სისტემა კონსერვატიული არ არის და ხახუნის ძალები გაფანტვის (დისიპაციის) ფუნქციიდან მიიღებან, მაშინ \mathcal{F} -სა და h -ის მიღების ტემპს შორის დამოკიდებულება არსებობს. როდესაც მოძრაობის განტოლებები (დისიპაციის ჩათვლით) 1.70 ფორმულით მოიცემიან, 2.52 ფორმულას შემდეგი სახე აქვს:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i.$$

განსაზღვრებიდან გამომდინარე (1.67 ფორმულა), ფუნქცია q -ების მეორე ხარისხის ჰომოგენური ფუნქციაა. ეულერის თეორემის მიხედვით:

$$\frac{dh}{dt} = -2\mathcal{F} - \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{2.59}$$

თუ L არ არის დროის ცხადი ფუნქცია და სისტემისთვის h ენერჯიის ანალოგიურია, მაშინ 2.59 ფორმულიდან გამომდინარე, $2\mathcal{F}$ ენერჯიის მიღების ტემპია:

$$\frac{dE}{dt} = -2\mathcal{F}, \tag{2.60}$$

დამატებები

1. დაასრულეთ ბრაქისტოქრონას ამოცანის 2.2 პარაგრაფში დაწყებული ამოხსნა და დაამტკიცეთ, რომ სასურველი გრაფიკი ციკლოიდა, რომლის წვერი ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დაწყების ადგილს ემთხვევა. ასევე დაამტკიცეთ, რომ თუ ნივთიერი წერტილი $\frac{1}{2}mv_0^2$ სანყისი კინეტიკური ენერჯიის პირობებში იწყებს მოძრაობს, მაშინ ბრაქისტოქრონა კვლავ ციკლოიდა, რომელიც ორ წერტილზე გადის და მისი წვერი $v_0^2 = 2gz$ ფორმულით მოცემული სანყისი წერტილიდან z მანძილით მალაა.

2. დაამტკიცეთ, რომ თუ ლაგრანჟის ფუნქციაში შემავალი პოტენციალი დროზე

დამოკიდებულ თერმებს შეიცავს, მთლიანი სისტემის ბრუნვის θ კოორდინატის შესაბამისი კანონიკური იმპულსი აღარ არის მექანიკური L_θ კუთხური იმპულსი და შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$p_\theta = L_\theta - \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times \nabla_{\mathbf{v}_i} U,$$

სადაც $\nabla_{\mathbf{v}_i}$ არის გრადიენტის ოპერატორი, რომელშიც განარმოება სიჩქარის კომპონენტებით ხდება, ხოლო \mathbf{n} - ბრუნვის მიმართულების ერთეულოვანი ვექტორია. თუ ძალები ელექტრომაგნიტურებია, მაშინ კანონიკური იმპულსი შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$p_\theta = L_\theta + \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times \frac{q_i}{c} \mathbf{A}_i.$$

3. დაამტკიცეთ, რომ სივრცეში მდებარე ორ ნერტილს შორის უმოკლესი მანძილი წრფეა.

4. დაამტკიცეთ, რომ სფერული ზედაპირების გეოდეზიური წირები დიდი წრეებია ანუ ისეთი წრეებია, რომელთა ცენტრები სფეროს ცენტრს ემთხვევა.

სავარჯიშოები

5. ნივთიერ ნერტილზე $V(x) = -Fx$ პოტენციალი მოქმედებს, სადაც F მუდმივაა. ეს ნერტილი t_0 დროის შუალედში $x = 0$ -დან $x = a$ -ში გადაადგილდება. დავუშვათ, ნივთიერი ნერტილის მოძრაობა $x(t) = A + Bt + Ct^2$ ფორმულით აღინერება. გამოთვალეთ A -ს, B -ს და C -ს მნიშვნელობები, როდესაც ქმედება მინიმალურია.

6. გამოთვალეთ ერთგვაროვანი მასის სიმკვრივის მქონე სფერულ დედამიწაში მოძრავი ნივთიერი ნერტილის ბრაქისტოქრონას მრუდის ამსახველი ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება. შემდეგ დიფერენციალური განტოლებისთვის h იაკობის ინტეგრალის ანალოგიური პირველი ინტეგრალი მიიღეთ. ამ ინტეგრალის დახმარებით დაამტკიცეთ, რომ სასურველი მრუდი ჰიპოციკლოიდა (უფრო მოზრდილი წრის შიგნით მგორავ წრეზე მდებარე ნერტილით შემოწერილი).

მიიღეთ დედამიწის ზედაპირის ორ ნერტილს შორის გავლებული ბრაქისტოქრონას გასწვრივ მოძრაობის დროის გამოსახულება. რა დრო დასჭირდება ბრაქისტოქრონას გვირაბის გასწვრივ (ხახუნის გარეშე) ნიუ-იორკიდან ლოს-ანჯელესამდე გავლას (ქალაქებს შორის ზედაპირზე მანძილი 4800კმ-ია) და ზედაპირიდან რა მანძილზე იქნება გვირაბის უღრმესი ნერტილი?

7. 2.1 პარაგრაფის მეორე მაგალითში ბრუნვის მინიმალური ზედაპირის პრობლემა

განვიხილეთ. გამოიკვლიეთ სიმეტრიული შემთხვევა, როდესაც $x = x_2$, $y_2 = -y_1 > 0$, და a პარამეტრისთვის საჭირო პირობა განზომილების არმქონე $k = x_2/a$ და $\alpha = y_2/x_2$ სიდიდეების საშუალებით ჩანერილი ტრანსცენდენტური განტოლებით გამოსახეთ.

დაამტკიცეთ, რომ როდესაც α გარკვეულ α_0 -ზე მეტია, k -ს ორი შესაძლო მნიშვნელობა შეიძლება ჰქონდეს. როდესაც $\alpha = \alpha_0$, k -ს მხოლოდ ერთი შესაძლო მნიშვნელობა ექნება, ხოლო თუ $\alpha < \alpha_0$, მაშინ k -ს რეალური მნიშვნელობის გამოთვლა შეუძლებელია და ამ არეში ჯაჭვნირულ ამონახსნს ვერ ვიპოვით.

იპოვეთ α_0 -ს მნიშვნელობა, თუ საჭიროა რიცხვითი გამოთვლები ჩაატარეთ.

8. უკვე აღწერილ ტეხილის სახის ამონახსნს (გვ. 42), როდესაც ბრუნვის ფართობს მხოლოდ y_1 და y_2 რადიუსების მქონე ბოლო წრეები ქმნიან, **გოლდშმიდტის ამონახსნი** ეწოდება. მე-7 სავარჯიშოში აღწერილი სიმეტრიული პირობების ჯაჭვნირული ამონახსნის მიერ წარმოქმნილი ფართობის გოლდშმიდტის ამონახსნის მიერ წარმოქმნილ ფართობთან შეფარდების გამოსახულება მიიღეთ. მიღებული გამოსახულება მხოლოდ k და α პარამეტრების ფუნქცია უნდა იყოს.

აჩვენეთ, რომ როდესაც α -ს საკმარისად დიდი მნიშვნელობა აქვს, სულ მცირე ერთი ჯაჭვნირული ამონახსნი გოლდშმიდტის ამონახსნის მიერ მოცემულ ფართობზე ნაკლებ ფართობს გვაძლევს. ასევე დაამტკიცეთ, რომ თუ $\alpha = \alpha_0$, მაშინ გოლდშმიდტის ამონახსნი ჯაჭვნირული ამონახსნის მიერ მოცემულ ფართობზე ნაკლებ ფართობს გვაძლევს.

9. უსასრულო სიგრძის თოკი დედამიწის ბრტყელი ზედაპირიდან y_1 და y_2 სიმაღლეებზე მდებარე შივებზე გადის. შივებს შორის ჰორიზონტალური მანძილია $x_2 - x_1$. აჩვენეთ, რომ თუ თოკის მასის წირითი სიმკვრივე ერთგვაროვანია, მაშინ შივებს შორის წარმოქმნილი მრუდის პოვნის ამოცანა ბრუნვის მინიმალური ზედაპირის პოვნის ამოცანის იდენტურია.

10. დავუშვათ ექსპერიმენტიდან ცნობილია, რომ ნივთიერი წერტილი y_0 მანძილზე ვარდება $t_0 = \sqrt{2y_0/g}$ დროში. y_0 -ისგან განსხვავებულ მანძილებზე ვარდნის დროები უცნობებია. ასევე დავუშვათ, რომ ლაგრანჟის ფუნქცია ცნობილია, მაგრამ y -ისთვის მოძრაობის განტოლების t -ის ფუნქციის სახით ამოხსნის ნაცვლად მიხვდნენ, რომ მისი ფუნქციონალური ფორმაა:

$$y = at + bt^2.$$

თუ a და b მუდმივები ყოველთვის ისეა შერჩეული, რომ y_0 მანძილზე ვარდნის დრო უდრის t_0 კორექტულ დროს, პირდაპირ აჩვენეთ, რომ ინტეგრალი

$$\int_0^{t_0} L dt$$

კოეფიციენტების რეალური მნიშვნელობებისთვის ექსტრემუმი მხოლოდ მაშინაა, როდესაც $a = 0$ და $b = g/2$.

11. ბილიარდის ორი ბურთის შეჯახებისას, ბურთებს შორის მოქმედ მყისიერ ძალებს

საკმაოდ დიდი მნიშვნელობები აქვთ, მაგრამ მხოლოდ Δt უსასრულოდ მცირე დროის განმავლობაში მოქმედებენ და ქვემოთ მოცემული სიდიდე სასრულია:

$$\int_{\Delta t} F dt$$

ამგვარ ძალებს **იმპულსური** ძალები ეწოდებათ, ხოლო Δt -ზე ინტეგრალს ძალის **იმპულსს** უწოდებენ. დაამტკიცეთ, რომ თუ იმპულსური ძალები მოქმედებენ, ლაგრანჟის განტოლებები ასე შეიძლება გარდაიქმნან:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)_f - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)_i = S_j,$$

სადაც i და f ინდექსები სისტემის მდგომარეობას ასახავენ იმპულსამდე და მის შემდეგ, S_j არის q_j -ის შესაბამისი განზოგადებული იმპულსური ძალის იმპულსი, ხოლო L - ყველა არაიმპულსური ძალის მომცველი ლაგრანჟის ფუნქციაა.

12. კლასიკური მექანიკის მრავალ სახეობას, რომლებშიც ლაგრანჟის ფუნქცია q_i -ის მაღალი რიგის დროით წარმოებულებს შეიცავს, **განზოგადებულ მექანიკას** უწოდებენ. ამოცანებს, სადაც $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, x, t)$, „მოუხერხებელ“ (გაკვრების მქონე) მექანიკას მიაკუთვნებენ. მოძრაობის ამგვარ განტოლებებს ქაოსის თეორიაში საკმაოდ საინტერესო გამოყენება აქვთ (იხ. მე-11 თავი). ვარიაციული აღრიცხვის მეთოდების გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ თუ $L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$, ფორმის ლაგრანჟის ფუნქცია არსებობს და ჰამილტონის პრინციპი ბოლო ნერტილებში q_i -ს და \dot{q}_i -ს ნულოვანი ვარიაციისთვის სრულდება, მაშინ ეილერ-ლაგრანჟის შესაბამისი განტოლებებია:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

მიღებული შედეგი ლაგრანჟის ფუნქციისთვის გამოვიყენოთ:

$$L = -\frac{m}{2} q \ddot{q} - \frac{k}{2} q^2.$$

ცნობთ თუ არა მოძრაობის განტოლებებს?

13. მძიმე ნივთიერი ნერტილი ვერტიკალური ფერსოს წვერზე მოათავსეს. ლაგრანჟის განუსაზღვრელი მამრავლების და ლაგრანჟის განტოლებების საშუალებით ნივთიერ ნერტილზე ფერსოდან მოქმედი ძალა გამოთვალეთ. გამოთვალეთ ნივთიერი ნერტილის ფერსოდან გადმოვარდნის (მონყევტის) სიმაღლე.

14. m მასის და r რადიუსის ერთგვაროვანი ფერსო R რადიუსის უძრავ ცილინდრზე სრიალის გარეშე გორავს. ერთადერთი გარე ძალა მიზიდულობაა. თუ პატარა ცილინდრი დიდ ცილინდრზე უძრავი მდგომარეობიდან გორვას დაიწყებს, ლაგრანჟის მამრავლების მეთოდის საშუალებით ფერსოს ცილინდრიდან გადმოვარდნის ნერტილი დაადგინეთ.

15. უიტსტონის წინალობის ხიდი, გარდა ჩვეულებრივი ოთხი წინალობისა, ერთ მხარში ინდუქციურობას შეიცავს, ხოლო საპირისპირო მხარში ტევადობაა ჩართული. დაუბალანსებელი ხიდისთვის L და \mathcal{F} ფუნქციები ააგეთ, როდესაც ელემენტების მუხტები კოორდინატებია. კირხჰოფის პირობები კვანძებისთვის დენზე შეზღუდვად მიიჩნით და ლაგრანჟის მოძრაობის განტოლებები მიიღეთ. დაამტკიცეთ, რომ λ -ს გამორიცხვა ამ განტოლებებს წრედის ჩვეულებრივ განტოლებებამდე დაიყვანს.

16. ზოგიერთ შემთხვევაში, განსაკუთრებით ერთგანზომილებიანი სისტემების პირობებში, ამოცანაში ხახუნის შემოტანა გაფანტვის ფუნქციის გარეშე შეიძლება. მაგალითად, ლაგრანჟის შემდეგი ფუნქციისთვის მოძრაობის განტოლებები მიიღეთ:

$$L = e^{\gamma t} \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2} \right).$$

როგორ აღწერდით სისტემას? არსებობენ თუ არა მოძრაობის მუდმივები? დავუშვათ, ნერტილოვანი გარდაქმნა შემდეგი სახით ხდება:

$$s = e^{\gamma t/2} q.$$

რას უდრის ეფექტური ლაგრანჟის ფუნქცია s -ით გამოსახული? მოძრაობის განტოლება s -ისთვის მიიღეთ. რას გვაუწყებენ მიღებული შედეგები სისტემის მუდმივი სიდიდეების შესახებ?

17. ზოგჯერ განზოგადებული კოორდინატები კინეტიკურ და პოტენციურ ენერგიებში ცალ-ცალკე გვხვდებიან და T და V შემდეგი სახით ჩაიწერებიან:

$$T = \sum_i f_i(q_i) \dot{q}_i^2 \qquad V = \sum_i V_i(q_i).$$

დაამტკიცეთ, რომ ლაგრანჟის განტოლებები ამ შემთხვევაში იყოფიან და ამოცანა ყოველთვის შეიძლება დავიყვანოთ განსაზღვრულ ინტეგრალებზე.

18. ნერტილოვანი მასა a რადიუსის და მასის არმქონე ფერსოზე მოძრაობს, რომელიც ვერტიკალურ სიბრტყეშია ფიქსირებული. სიბრტყე ფერსოს ვერტიკალური სიმეტრიის ღერძის მიმართ თანაბარი ω კუთხური სიჩქარით ბრუნავს. ლაგრანჟის მოძრაობის განტოლებები მიიღეთ, თუ გარე ძალებს მხოლოდ გრავიტაციული ძალები წარმოადგენენ.

მოძრაობის რა მუდმივები არსებობენ? დაამტკიცეთ, რომ თუ ω კრიტიკულ ω_0 მნიშვნელობაზე მეტია, მაშინ არსებობს ამონახსნი, რომლის დროსაც ნივთიერი ნერტილი ფერსოს რომელიმე ნერტილში (გარდა ფერსოს ფსკერისა) უძრავად იმყოფება, ხოლო თუ $\omega < \omega_0$, მაშინ ნაწილაკის ერთადერთი უძრავობის ნერტილი ფერსოს ფსკერზე მდებარეობს. რა მნიშვნელობა აქვს ω_0 -ს?

19. ნივთიერი ნერტილი სხვადასხვა მასების განაწილების შედეგად მიღებული ძალის კონსერვატიულ ველში ხახუნის გარეშე მოძრაობს. განაწილების მოცულობითი ელემენ-

ტის მიერ წარმოქმნილი ძალა მოცულობითი ელემენტის მასის პროპორციული პოტენციალიდან მიიღება და მხოლოდ მოცულობითი ელემენტიდან სკალარული მანძილის ფუნქციაა. მასის ქვემოთ მოცემული მუდმივი, ერთგვაროვანი განაწილებისას, ნივთიერი ნერტილის მოძრაობასთან დაკავშირებული მუდმივი სიდიდეები ჩამოთვალეთ:

- ა) მასა $z = 0$ სიბრტყეზე თანაბრად განაწილებული;
- ბ) მასას $z = 0$, $y > 0$ ნახევარსიბრტყეზე თანაბრად განაწილებული;
- გ) მასა თანაბრად განაწილებული უსასრულო სიგრძის წრიულ ცილინდრში, რომლის ღერძი Z ღერძის გასწვრივაა მიმართული;
- დ) მასა თანაბრად განაწილებული სასრული სიგრძის წრიულ ცილინდრში, რომლის ღერძი Z ღერძის გასწვრივაა მიმართული;
- ე) მასა თანაბრად განაწილებული უსასრულო სიგრძის და ელიპსური განივი კვეთის მქონე მართკუთხა ცილინდრშია, რომლის ღერძი Z ღერძის გასწვრივაა მიმართული;
- ვ) მასა თანაბრად განაწილებული ჰანტელში, რომლის ღერძი Z ღერძის გასწვრივაა მიმართული.
- ზ) მასა უსასრულო სპირალური სოლენოიდის სახით დახვეული ერთგვაროვანი მავთულია, ხოლო სოლენოიდის ღერძი Z ღერძის გასწვრივაა მიმართული.

20. m მასის ნივთიერი ნერტილი α კუთხის და M მასის სოლზე ხახუნის გარეშე სრიალდება. სოლი სწორ, ჰორიზონტალურ ზედაპირზე ხახუნის გარეშე გადაადგილდება (იხ. სურათი). ნივთიერ ნერტილზე მოქმედ შეზღუდვას ლაგრანჟის მამრავლების მეთოდი მიუსადაგეთ და ნივთიერი ნერტილისა და სოლისთვის მოძრაობის განტოლებები მიიღეთ.

ასევე მიიღეთ შეზღუდვის ძალების გამოსახულება. გამოთვალეთ ნივთიერ ნერტილზე და სოლზე მოქმედი შეზღუდვის ძალების მიერ t დროში შესრულებული მუშაობა. მოძრაობის რა მუდმივები არსებობს სისტემისთვის?

მიღებული შედეგები შეადარეთ სიტუაციას, როდესაც სოლი უძრავია. (**რჩევა:** ნივთიერი ნერტილისთვის შეგიძლიათ გამოიყენოთ დეკარტიის კოორდინატთა სისტემა, რომლის y ღერძი ვერტიკალურია ან სოლისადმი პერპენდიკულარულია.)

21. ვაგონეტი მყარ ძელაკზე დამაგრებულ რელსებზე გადაადგილდება (იხ. სურათი). ის r_0 ნონასწორული სიგრძის და k სიხისტის ზამბარაზეა დამაგრებული, ხოლო ზამბარის მეორე ბოლო ძელაკზეა ფიქსირებული. ვაგონეტზე ლიანდაგების კიდევ ერთი წყვილია დამაგრებული, რომელიც პირველისადმი პერპენდიკულარულია.

მეორე ლიანდაგზე m მასის ნივთიერი ნერტილი მოძრაობს, რომელსაც ძელაკზე დამაგრებული, k სიხისტის და ნულოვანი ნონასწორული სიგრძის ზამბარა აკავებს.

ძელაკს, ლიანდაგებს, ზამბარებს და ვაგონეტს მასა არ გააჩნიათ. მთლიანი სისტემა

პირველი ზამბარის მიმაგრების წერტილის მიმართ სიბრტყეში მოძრაობს და თანაბარი ω კუთხური სიჩქარე აქვს. დროის ნებისმიერ მომენტში მეორე ზამბარის სიგრძე r_0 -თან შედარებით მცირედ მიიჩნევა.

- ა) რა ენერგია აქვს სისტემას? ინახება თუ არა ის?
- ბ) ლაბორატორიული სისტემის განზოგადებულ კოორდინატებში რას უდრის სისტემის იაკობის ინტეგრალი? ინახება თუ არა ის?
- გ) ω კუთხური სიჩქარით მბრუნავ სისტემასთან დაკავშირებულ განზოგადებულ კოორდინატებში რას უდრის ლაგრანჟის ფუნქცია? რას უდრის იაკობის ინტეგრალი? ინახება თუ არა ის? განიხილეთ იაკობის ორ ინტეგრალს შორის კავშირი.

22. დავუშვათ, ნივთიერი წერტილი სივრცეში მოძრაობს და მასზე კონერვატიული $V(\mathbf{r})$ პოტენციალი მოქმედებს. ნივთიერი წერტილის მოძრაობაზე დადებული შეზღუდვის თანახმად ის ყოველთვის მოძრაობს ზედაპირზე, რომლის განტოლებაა $\sigma(r, t) = 0$. (t -ზე ცხადი დამოკიდებულებიდან გამომდინარე, ზედაპირი შეიძლება მოძრაობდეს).

შეზღუდვის მყისიერი ძალა ყოველთვის ზედაპირისადმი პერპენდიკულარულია. ანალიტიკურად დაამტკიცეთ, რომ ნივთიერი წერტილის ენერგია მუდმივი არ არის თუ ზედაპირი დროში მოძრაობს. ფიზიკურად რას წარმოადგენს ენერგიის ცვლილების მიზეზი ასეთ პირობებში?

23. განვიხილოთ m_1 და m_2 მასის ორი ნივთიერი წერტილი. დადებული შეზღუდვების თანახმად, m_1 მასის ნივთიერი წერტილი $x = y = 0$ წერტილზე ცენტრირებულ a რადიუსის წრეზე $z = 0$ სიბრტყეში მოძრაობს, ხოლო m_2 მასის ნივთიერი წერტილი $x = y = 0$ წერტილზე ცენტრირებულ b რადიუსის წრეზე $z = c$ სიბრტყეში მოძრაობს. ორ ნივთიერ წერტილს შორის k სიხისტის მსუბუქი (მასის არმქონე) ზამბარაა დამაგრებული.

- ა) გამოთვალეთ სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია
- ბ) ამოცანა ლაგრანჟის მამრავლების საშუალებით ამოხსენით და თითოეულ მამრავლს ფიზიკური ინტერპრეტაცია მოიყვანეთ.

24. ერთგანზომილებიანი ჰარმონიული ოსცილატორის ლაგრანჟის ფუნქციაა $L = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2$. დავუშვათ ჩვენ არ ვიცით მოძრაობის ამონახსნი, მაგრამ ვიცით, რომ მოძრაობა პერიოდულია და შემდეგი სახის ფურიეს მწკრივით აღინერება:

$$x(t) = \sum_{j=0} a_j \cos j\omega t,$$

(შემობრუნების წერტილში $t = 0$), სადაც ω არის მოძრაობის უცნობი კუთხური სიბრტყე. $x(t)$ -ს ამგვარი წარმოდგენა კონფიგურაციულ სივრცეში სისტემის წერტილისათვის მრავალპარამეტრიან ტრაექტორიას განსაზღვრავს. განიხილეთ $T = 2\pi/\omega$ პერიოდით დაცილებული t_1 და t_2 დროის მომენტებს შორის I ქმედების ინტეგრალი.

აჩვენეთ, რომ სისტემის ტრაექტორიის ასეთი ფორმის დროს I არანულოვანი x -ისთვის ექსტრემუმი მხოლოდ მაშინ იქნება, თუ $a_j = 0$, როდესაც $j \neq 1$ და $\omega^2 = k/m$.

25. R რადიუსის დისკო უძრავ $y = ax^2$ პარაბოლას შიგნით სრიალის გარეშე გორავს. იპოვეთ შეზღუდვის განტოლებები. რომელი პირობა აძლევს დისკოს ისეთი სახით გორვის საშუალებას, რომ დისკოს ნებისმიერი მდებარეობისას ის პარაბოლას მხოლოდ ერთ წერტილში ეხება?

26. m მასის ნივთიერი წერტილი L სიგრძის და მასის არმქონე თოკზეა ჩამოკიდებული. ნივთიერი წერტილი უძრავია და g დაძაბულობის გრავიტაციულ ველში იმყოფება. შემდეგ ნივთიერ წერტილზე ჰორიზონტალური იმპულსური ძალა მოქმედებს და ω კუთხური სიჩქარე ჩნდება. თუ ω საკმარისად მცირეა, მაშინ მასა მარტივი ქანქარის (მათემატიკური ქანქარის) მსგავსად მოძრაობს. თუ ω საკმარისად დიდია, მაშინ მასა საყრდენი წერტილის გარშემო ბრუნავს. ლაგრანჟის მამრავლის საშუალებით ისეთი პირობები განსაზღვრეთ, როდესაც თოკი მოძრაობის რომელიმე მომენტში სრულიად მოეშვება.

27. ა) დაამტკიცეთ, რომ 2.29 ფორმულით მოცემული შეზღუდვა არაჰოლონომიურია, ვინაიდან მისი ინტეგრება ჰომონომიურ ფორმაში შეუძლებელია.

ბ) დაამტკიცეთ, რომ შეზღუდვის შესაბამისი ძალები წარმოსახვით მუშაობას არ ასრულებენ.

გ) 2.29-2.30 ფორმულებს ერთი ან მეტი ამონახსნი მოუნახეთ, როდესაც $V = 0$ და დაამტკიცეთ, რომ ისინი ენერგიას ინახავენ.

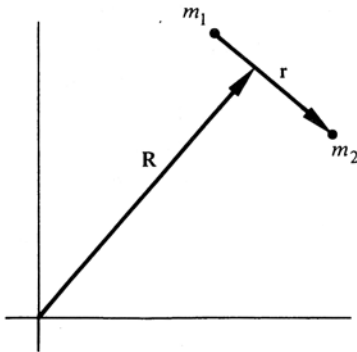
ცენტრალური ძალის ამოცანა

ამ თავში ორ სხეულს შორის მოქმედი ცენტრალური ძალის მოქმედების შედეგად სხეულების მოძრაობას განვიხილავთ. ცენტრალურ ძალასთან დაკავშირებული ყველა ამოცანის ამოხსნა კარგად ცნობილი ფუნქციების ინტეგრებით შეუძლებელია. მიუხედავად ამისა, ჩვენ შევეცდებით ამოცანა დანვრილებით განვიხილოთ და აქამდე შესწავლილი მეთოდებით მისი ამოხსნა ვცადოთ. ამ თავის ბოლო პარაგრაფში მესამე სხეულის არსებობის შედეგად გაჩენილ გართულებებსაც შევეხებით.

3.1 ერთი სხეულის ექვივალენტურ ამოცანაზე დაყვანა

განვიხილოთ m_1 და m_2 მასის ორი წერტილისგან შედგენილი მონოგენური სისტემა (იხ. სურ. 3.1), რომელშიც ყველა მოქმედი ძალა ურთიერთქმედების U პოტენციალით არის გამონვეული. თავდაპირველად ვუშვებთ, რომ U არის ნივთიერ წერტილებს შორის $r_2 - r_1$ ვექტორის, $\dot{r}_2 - \dot{r}_1$ ფარდობითი სიჩქარის ან $r_2 - r_1$ -ის ნებისმიერი მაღალი რიგის წარმოებულის ნებისმიერი ფუნქცია. ამგვარ სისტემას თავისუფლების ექვსი ხარისხი ანუ ექვსი დამოუკიდებელი განზოგადებული კოორდინატი აქვს. კოორდინატებად ავირჩიოთ \mathbf{R} მასათა ცენტრამდე გავლებული რადიუს-ვექტორის სამ კომპონენტს დამატებული $\mathbf{r} = r_2 - r_1$ სხვაობის ვექტორის სამი კომპონენტი. ლაგრანჟის ფუნქციას ასეთი სახე აქვს:

$$L = T(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{r}}) - U(r, \dot{r}, \dots). \quad (3.1)$$



სურ. 3.1. კოორდინატები ორ სხეულთან დაკავშირებული ამოცანისთვის

T კინეტიკური ენერგია მასათა ცენტრის მოძრაობის კინეტიკურ ენერგიას დამატებული მასათა ცენტრის გარშემო მოძრაობის T' კინეტიკური ენერგიაა:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + T'$$

სადაც

$$T' = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2'^2.$$

აქ \mathbf{r}'_1 და \mathbf{r}'_2 ორი ნივთიერი ნერტილის რადიუს-ვექტორებია მასათა ცენტრისადმი და ისინი \mathbf{r} -თან შემდეგ დამოკიდებულებაში არიან :

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r} \quad (3.2)$$

3.2 ფორმულის საშუალებით T' ენერგია \mathbf{r} -ის საშუალებით ჩავენროთ და მივიღებთ:

$$T' = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{\mathbf{r}}^2$$

ლაგრანჟის ფუნქცია იქნება: $L = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \dots).$ (3.3)

უკვე ვხედავთ, რომ სამი \mathbf{R} კოორდინატი ციკლურია და მასათა ცენტრი უძრავია ან თანაბრად მოძრაობს. \mathbf{r} ისთვის განკუთვნილი მოძრაობის არც ერთ განტოლებაში \mathbf{R} -ის ან $\dot{\mathbf{R}}$ -ის შემცველი წევრი არ შედის. შესაბამისად, ინტეგრების პროცესი საკმაოდ მარტივია ამ შემთხვევაში. მომავალ გამოთვლებში ჩვენ უბრალოდ ლაგრანჟის ფუნქციიდან პირველ წევრს ამოვაგდებთ.

ლაგრანჟის ფუნქციის დარჩენილი ნაწილი ზუსტად ისეთია, როგორც უძრავი ძალის ცენტრიდან r მანძილით დაშორებულ ნაწილაკს ექნებოდა, რომლის მასაა

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}, \quad (3.4)$$

სადაც μ -ს **დაყვანილი მასა** ეწოდება. 3.4 ფორმულა ხშირად ასეთი სახით ჩაინერება:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (3.5)$$

მაშასადამე, ცენტრალური ძალით გამოწვეული ორი სხეულის მოძრაობა მათი მასათა ცენტრის გარშემო ყოველთვის შეგვიძლია დავიყვანოთ ერთი სხეულის ექვივალენტურ ამოცანაზე.

3.2 მოძრაობის განტოლებები და პირველი ინტეგრალები

ამჯერად კონსერვატიული ცენტრალური ძალების განვიხილვით შემოვიფარგლოთ, როდესაც $V(r)$ პოტენციალი მხოლოდ r -ის ფუნქციაა და ძალა ყოველთვის \mathbf{r} -ის გასწვრივა მიმართული. წინა პარაგრაფიდან გამომდინარე, ჩვენ მხოლოდ m დაყვანილი მასის მქონე ნივთიერი ნერტილი უნდა განვიხილოთ, რომელიც ძალის ფიქსირებული ცენტრის გარშემო მოძრაობს, ხოლო ძალის ცენტრი კოორდინატთა სისტემის ათვლის სათავე იქნება. ვინაიდან პოტენციური ენერგია მხოლოდ რადიალურ მანძილს მოიცავს, ამოცანა

სფერულად სიმეტრიულია ანუ ნებისმიერი მობრუნება ნებისმიერი ფიქსირებული ღერძის გარშემო ამონახსნზე ზეგავლენას არ მოახდენს. აქედან გამომდინარე, ფიქსირებული ღერძის გარშემო ბრუნვის ამსახველი კუთხური კოორდინატი ციკლურია. სიმეტრიის ასეთი თვისებები ამოცანას მნიშვნელოვნად ამარტივებს.

ამოცანა სფერულად სიმეტრიულია, ამიტომ სრული იმპულსის მომენტის ვექტორი ინახება.

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

აქედან გამომდინარე, \mathbf{r} ყოველთვის პერპენდიკულარულია \mathbf{L} -ის ფიქსირებული მიმართულებისადმი სივრცეში. ეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში მოხდება, თუ \mathbf{r} ყოველთვის \mathbf{L} -ის პარალელური პერპენდიკულარის მქონე სიბრტყეში მდებარეობს. მსჯელობა აზრს კარგავს, როდესაც \mathbf{L} ნულის ტოლია, ვინაიდან ამ შემთხვევაში მოძრაობა ძალის ცენტრზე გამავალი წრფის გასწვრივ ხდება. $\mathbf{L}=0$ პირობის შესრულებისთვის საჭიროა \mathbf{r} იყოს $\dot{\mathbf{r}}$ -ისადმი პარალელური, რაც თავის მხრივ მხოლოდ წრფივი მოძრაობის დროს ხდება¹. მაშასადამე, ცენტრალური ძალით გამოწვეული მოძრაობა ყოველთვის სიბრტყეში ხდება.

ერთი ნივთიერი წერტილის მოძრაობას სივრცეში სამი სფერული პოლარული კოორდინატი ასახავს. ეს კოორდინატებია θ აზიმუტური კუთხე, ψ ზენიტური კუთხე და \mathbf{r} რადიალური მანძილი. პოლარული ღერძი \mathbf{L} -ის მიმართულებისა ავირჩიოთ და მოძრაობა ყოველთვის პოლარული ღერძისადმი პერპენდიკულარულ სიბრტყეში მოხდება. ψ კოორდინატს მხოლოდ ერთი $\pi/2$ მუდმივი მნიშვნელობა აქვს და შემდგომში შეგვიძლია უგულებელვყოთ. იმპულსის მომენტის ვექტორის მუდმივობა მოძრაობის სამ დამოუკიდებელ მუდმივას გვაძლევს. ორი მათგანი იმპულსის მომენტის მუდმივ მიმართულებას ასახავს და ისინი ამოცანის სამიდან ორ თავისუფლების ხარისხამდე დაყვანაში გამოიყენებიან. მესამე მუდმივა \mathbf{L} ვექტორის მოდულის მუდმივობას შეესაბამება და ამოხსნის დასრულებისთვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ.

სიბრტყის პოლარულ კოორდინატებში ლაგრანჟის ფუნქციაა:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r). \end{aligned} \tag{3.6}$$

როგორც ვივარაუდეთ, θ ციკლური კოორდინატია და მისი შესაბამისი კანონიკური იმპულსი სისტემის იმპულსის მომენტია:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

მოძრაობის ორი განტოლებიდან ერთ-ერთია:

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0, \tag{3.7}$$

¹ $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{n}_r + r\dot{\theta}\mathbf{n}_\theta$, ამიტომ $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$ პირობის შესრულებისთვის $\dot{\theta}$ ნულის ტოლი უნდა იყოს

ხოლო მისი ინტეგრალია: $mr^2\dot{\theta} = l,$ (3.8)

სადაც l არის იმპულსის მომენტის მუდმივი მოდული. 3.7 ფორმულიდან გამომდინარე:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right) = 0. \quad (3.9)$$

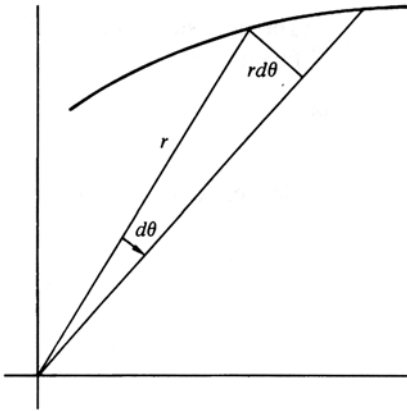
$\frac{1}{2}$ კოეფიციენტი იმიტომ შემოვიტანეთ, რომ $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ **სექტორული სიჩქარე** ანუ დროის ერთეულში რადიუს-ვექტორის მიერ შემონერილი ფართობია. 3.2 სურათიდან გამომდინარე, dt დროში შემონერილი დიფერენციალური ფართობია:

$$dA = \frac{1}{2}r(rd\theta),$$

აქედან გამომდინარე:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

იმპულსის მომენტის მუდმივობა ნიშნავს, რომ სექტორული სიჩქარე მუდმივია. ამჯერად პლანეტების მოძრაობასთან დაკავშირებული კეპლერის მეორე კანონი დავამტკიცებთ, რომლის თანახმად, რადიუს-ვექტორი თანაბარ დროის შუალედებში თანაბარ ფართობებს შემონერს. სექტორული სიჩქარის მუდმივობა ცენტრალური ძალით გამონვეული მოძრაობის ზოგადი თვისებაა და ძალის შებრუნებული კვადრატების კანონით არ შემოიფარგლება.



სურ. 3.2. რადიუს-ვექტორის მიერ შემონერილი ფართობი dt დროში

ლაგრანჟის დარჩენილი განტოლება r კოორდინატისთვის იქნება :

$$\frac{d}{dt}(mr\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \quad (3.10)$$

\mathbf{r} -ის გასწვრივ მოქმედი $-\partial V/\partial r$ ძალის $f(r)$ -ით აღნიშვნის შემდეგ განტოლება ასე შეიძლება ჩაიწეროს :

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r). \quad (3.11)$$

პირველი ინტეგრალის (3.8 ფორმულა) საშუალებით $\dot{\theta}$ მოძრაობის განტოლებიდან გამოირიცხება და მხოლოდ r -ის შემცველ, მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას მივიღებთ :

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r). \quad (3.12)$$

მოძრაობის კიდევ ერთი პირველი ინტეგრალი, კერძოდ სრული ენერგია არსებობს, ვინაიდან ძალები კონსერვატიულებია. ენერგიის შენახვის ზოგადი თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია სწრაფად დავადგინოთ, რომ მოძრაობის მუდმივაა:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r), \quad (3.13)$$

სადაც E არის სისტემის ენერგია. პირველი ინტეგრალი მოძრაობის 3.7 და 3.12 განტოლებებიდანაც შეგვიძლია მივიღოთ. 3.12 ფორმულა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right). \quad (3.14)$$

თუ 3.14 ფორმულის ორივე მხარეს \dot{r} -ზე გავამრავლებთ, მისი მარცხენა მხარე იქნება:

$$m\dot{r}\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right).$$

ფორმულის მარჯვენა მხარეც დროით სრული წარმოებულის სახით შეიძლება ჩაიწეროს, ვინაიდან თუ $g(r)$ r -ის ნებისმიერი ფუნქციაა, მაშინ g -ს სრული წარმოებული დროით იქნება:

$$\frac{d}{dt}g(r) = \frac{dg}{dr}\frac{dr}{dt}.$$

აქედან გამომდინარე, 3.14 ფორმულა შემდეგი ფორმულის ექვივალენტურია :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right) \quad \text{აბ}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V\right) = 0 \quad \text{და ამიტომ:}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V = \text{constant}. \quad (3.15)$$

3.15 ფორმულა სრული ენერგიის მუდმივობას ასახავს, ვინაიდან l -ისთვის 3.8 ფორმულის მისადაგების შემდეგ 3.15 ფორმულის შუა წევრი ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} = \frac{1}{2mr^2}m^2r^4\dot{\theta}^2 = \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2},$$

და 3.15 ფორმულა 3.13 ფორმულაზე დაიყვანება.

პირველი ორი ინტეგრალი ორ განსაზღვრულ ინტეგრალს გვაძლევს, რომელიც ამოცანის ამოხსნისთვის არის საჭირო. ვინაიდან r და θ ორი უცნობი გვაქვს, მოძრაობის განტოლებების ამოხსნისთვის ოთხი ინტეგრება საჭირო. პირველი ორი ინტეგრების შედეგად ლაგრანჟის განტოლებები პირველი რიგის 3.8 და 3.15 განტოლებებად გარდაიქმნენ. დარჩენილი ორი ინტეგრება სხვადასხვა გზით შეიძლება განხორციელდეს. უმარტივესი პროცედურა ალბათ მაინც 3.15 ფორმულას უკავშირდება. ეს ფორმულა r -ისთვის ამოვხსნათ და გვექნება:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}, \quad (3.16)$$

ან

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}. \quad (3.17)$$

ვთქვათ $t=0$ დროს r -ს სანყისი r_0 მნიშვნელობა აქვს. ამ შემთხვევაში განტოლების ორივე მხარეს არსებული ინტეგრალი სანყისი მდგომარეობიდან t დროის მომენტისათვის არსებულ მდგომარეობამდე ასეთ სახეს მიიღებს:

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} \quad (3.18)$$

3.18 ფორმულა t -ს r -ის და ინტეგრების E , l და r_0 მუდმივების ფუნქციის სახით გვაძლევს. გარდა ამისა, შესაძლებელია ამ ფორმულის შებრუნება ანუ r -ის t -ს და მუდმივების ფუნქციის სახით გამოთვლა. როდესაც r -ისთვის ამონახსნს გამოვთვლით, θ ამონახსნი 3.8 ფორმულიდან მიიღება და ასეთი სახით ჩაიწერება:

$$d\theta = \frac{l dt}{mr^2}. \quad (3.19)$$

თუ θ -ის სანყისი მნიშვნელობა θ_0 -ია, მაშინ 3.19 ფორმულის ინტეგრალია:

$$\theta = l \int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0. \quad (3.20)$$

3.18 და 3.20 ფორმულები ორ დარჩენილ ინტეგრებას წარმოადგენენ და ფორმალურად ამოცანა ინტეგრალების გამოთვლებზე იქნა დაყვანილი ოთხი ინტეგრების მუდმივით E , l , r_0 , θ_0 . ამ მუდმივების ნაცვლად ჩვენ შეგვეძლო r_0 , θ_0 , r_0 , θ_0 , სიდიდეები აგველო, თუმცა E და l გამოსახვა ყოველთვის შესაძლებელია ამ ახალი სიმრავლის საშუალებით. უმეტეს გამოყენებით შემთხვევაში ენერჯის და კუთხური იმპულსის შემცველი სიმრავლე ყველაზე ბუნებრივია. კვანტურ მექანიკაში ასეთი მუდმივები, ანუ r -ის და θ -ის ან \dot{r} -ის და $\dot{\theta}$ -ის სანყისი მნიშვნელობები აზრს კარგავენ, ხოლო სისტემის ენერჯია ან სისტემის იმპულსის მომენტი კვლავ რჩება. კლასიკურ და კვანტურ მექანიკას შორის ერთ-ერთი მთავარი სხვაობა E -ის და l -ის თვისებებია ამ ორ თეორიაში. კვანტურ თეო-

რიაზე გადასვლისთვის აუცილებელია, რომ სისტემის კლასიკური აღწერა ენერჯის და იმპულსის მომენტის საშუალებით ხდებოდეს.

3.3 ექვივალენტური ერთგანზომილებიანი ამოცანა და ორბიტების კლასიფიკაცია

ჩვენ ერთგანზომილებიანი ამოცანა ფორმალურად ამოვხსენით, მაგრამ პრაქტიკული თვალსაზრისით 3.18 და 3.20 ინტეგრალები საკმაოდ ძნელად გამოსათვლელია და კონკრეტულ შემთხვევაში ინტეგრება რაიმე სხვა მეთოდით სჯობს. ვიდრე ნებისმიერი კონკრეტული ძალისთვის რაიმე ამონახსნს გამოვთვლით, მოდით ვნახოთ, თუ რისი გაგება შეიძლება მოძრაობაზე მოძრაობის განტოლებების და შენახვის თეორემების საშუალებით.

მაგალითად, როდესაც სისტემას ცნობილი ენერჯია და იმპულსის მომენტი აქვს, ნივთიერი წერტილის სიჩქარის მიმართულების და სიდიდის გაგება r მანძილის საშუალებით შეიძლება. ენერჯიის შენახვიდან გამომდინარე, სიჩქარის v სიდიდეა:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)$$

ანუ

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r))}. \quad (3.21)$$

რადიალური სიჩქარე ანუ \dot{r} -ის კომპონენტი რადიუს-ვექტორის გასწვრივ 3.16 ფორმულით გამოითვლება. v სიდიდესთან ერთად რადიალური სიჩქარის ცოდნა სიჩქარის მიმართულების დასადგენად საკმარისი ინფორმაციაა². იგივე შედეგები და უფრო მეტიც ექვივალენტური ერთგანზომილებიანი ამოცანის განხილვის შედეგად მიიღებინ.

r -ში მოცემული მოძრაობის 3.12 განტოლება, როდესაც $\dot{\theta}$ სიდიდე l -ითაა გამოსახული, მხოლოდ r -ს და მის წარმოებულებს შეცავს. იგივე განტოლებას ფიქტიური ერთგანზომილებიანი ამოცანის განხილვისას მივიღებთ, რომელშიც m მასის ნივთიერ წერტილზე შემდეგი ძალა მოქმედებს:

$$f' = f + \frac{l^2}{mr^3}. \quad (3.22)$$

დამატებითი წერის მნიშვნელობა ცხადი გახდება, თუ მას $mr\dot{\theta}^2 = mv_{\theta}^2/r$, ფორმით ჩავწეროთ, რაც თავის მხრივ ცენტრიდანული ძალაა. იგივე მტკიცება ენერჯიის შენახვის თეორემიდანაც შეგვილია მივიღოთ. 3.15 ფორმულის თანახმად, ნივთიერი წერტილის მოძრაობა წარმოადგენს ერთგანზომილებიან ამოცანას შემდეგი სახის ფიქტიური პოტენციური ენერჯიით:

$$V' = V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2}. \quad (3.22')$$

2 იმპულსის მომენტის მუდმივობის თეორემა $\dot{\theta}$ -ს, ანუ კუთხურ სიჩქარეს, გვატყობინებს, რაც \dot{r} -თან ერთად $\dot{\mathbf{r}}$ -ის მოდულისა და მიმართულების დადგენისთვის საკმარისია

შესამონმებლად შევნიშნოთ, რომ $f' = -\frac{\partial V'}{\partial r} = f(r) + \frac{l^2}{mr^3}$,
 რაც 3.22 ფორმულასთან შესაბამისობაშია. ენერჯის შენახვის თეორემა (3.15 ფორ-
 მულა) ასეც შეიძლება ჩაინეროს: $E = V' + \frac{1}{2}mr^2$. (3.15')

მოძრაობის შესწავლის მეთოდის საჩვენებლად V' -ის r -ზე დამოკიდებულების გრაფი-
 კი განვიხილოთ, როდესაც მიზიდულობის ძალა შებრუნებული კვადრატების კანონით
 მოქმედებს: $f = -\frac{k}{r^2}$.

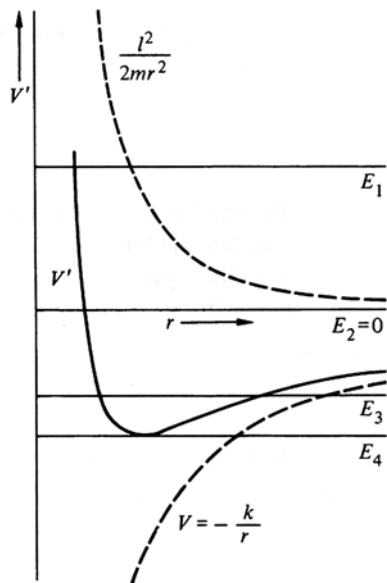
(დადებითი k -ს შემთხვევაში მინუს ნიშანი ასახავს, რომ ძალა ძალის ცენტრისკენაა
 მიმართული). ამგვარი ძალის პირობებში პოტენციური ენერჯიაა:

$$V = -\frac{k}{r},$$

შესაბამისი ფიქტიური პოტენციალია:

$$V' = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}.$$

გრაფიკი 3.3 სურათზეა გამოსახული. ნყვეტილი ხაზები ცალკეულ კომპონენტებს
 ასახავენ: $-\frac{k}{r}$ და $\frac{l^2}{2mr^2}$, უწყვეტი ხაზი V' ჯამია.

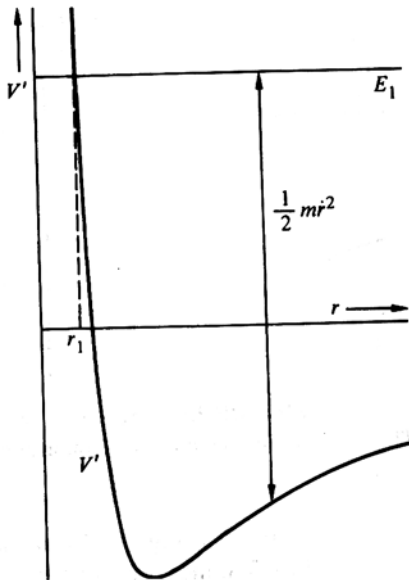


სურ. 3.3. ექვივალენტური ერთგანზომილებიანი პო-
 ტენციალი მიზიდველი ძალის შებრუნებული კვად-
 რატების კანონისთვის

მოდით 3.3 და 3.4 სურათზე გამოსახული, E_1 ენერჯიის მქონე ნივთიერი ნერტილის მოძრაობას დავაკვირდეთ. ცხადია, ეს ნივთიერი ნერტილი r_1 -ზე უფრო ახლოს ვერ მივა (იხ. სურ. 3.4). სხვა შემთხვევაში, როდესაც $r < r_1$, V' აჭარბებს E_1 -ს და 3.15' ფორმულის თანახმად, კინეტიკური ენერჯია უარყოფითი იქნება, რაც წარმოსახვით სიჩქარეს ნიშნავს.

მეორეს მხრივ, r -ის შესაძლო მნიშვნელობას ზედა ზღვარი არ გააჩნია და ამიტომ ორბიტა შემოსაზღვრული არ არის. ნივთიერი ნერტილი მოძრაობას უსასრულობიდან დაიწყებს, „ამსხლექ ცენტრიდანულ ზღუდეს“ შეეჯახება, აისხლიტება და კვლავ უსასრულობაში დაბრუნდება (იხ. სურ. 3.5). E -ს და V' -ს შორის მანძილი $\frac{1}{2}mr^2$ -ია, ანუ რადიალური სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია და r_1 შემობრუნების ნერტილში ნულის ტოლი ხდება. ამავე დროს, გრაფიკზე E -სა და V -ს შორის r მანძილის მოცემული მნიშვნელობის პირობებში $\frac{1}{2}mv^2$ კინეტიკური ენერჯიაა. აქედან გამომდინარე, V და V' გრაფიკებს შორის მანძილია $\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$. მაშასადამე, ეს გრაფიკები ნივთიერი ნერტილის სიჩქარის სიდიდეს და მოცემული ენერჯიისა და კუთხური იმპულსის პირობებში ნებისმიერი r მანძილისთვის ამ სიჩქარის კომპონენტებს გვაწვდიან. ორბიტის ფორმის მიახლოებითი სურათის მისაღებად ეს ინფორმაცია სრულიად საკმარისია.

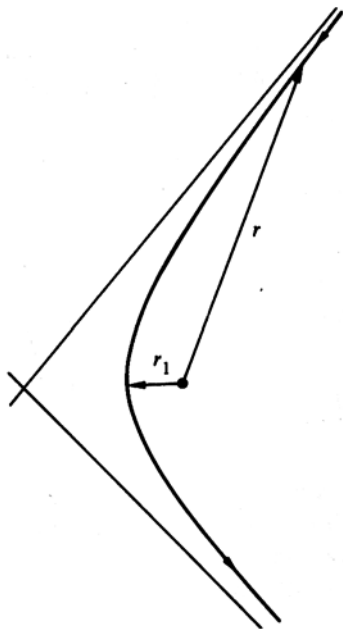
როდესაც $E_2 = 0$ (იხ. სურ. 3.3), ორბიტას დაახლოებით მსგავსი ფორმა აქვს. ნებისმიერი უფრო მცირე ენერჯიის პირობებში (როგორცაა E_3 3.6 სურათზე), სრულიად განსხვავებული მდგომარეობაა. r_1 ქვედა საზღვართან ერთად r_2 მაქსიმალური მნიშვნელობაც არსებობს, რომელსაც r -ი დადებითი კინეტიკური ენერჯიის პირობებში ვერ გადააჭარბებს. ამ შემთხვევაში მოძრაობა „შემოსაზღვრულია“ და r_1 და r_2 ორი შემობრუნების ნერტილი გვაქვს, რომელთაც **აპსიდალური მანძილები** ეწოდებათ. ეს არ ნიშნავს, რომ ორბიტები



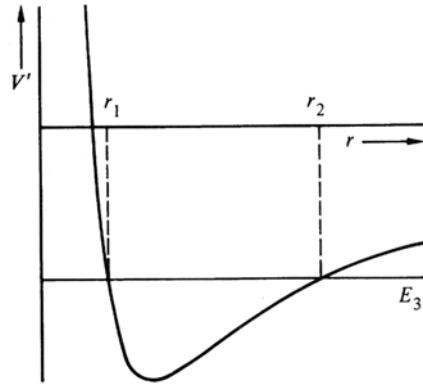
აუცილებლად ჩაკეტილებია. ერთადერთი რაც დანამდვილებით შეიძლება ითქვას, ორბიტები შემოსაზღვრულებია და r_1 და r_2 რადიუსების ორ წრეს შორის არიან მოქცეულნი, ხოლო შემობრუნების ნერტილები ყოველთვის წრეებზე მდებარეობენ (იხ. სურ. 3.7).

$$f(r) = -\frac{l^2}{mr^3} = -mr\dot{\theta}^2.$$

სურ. 3.4. შემოსაზღვრული მოძრაობა დადებითი ენერჯიების პირობებში ძალის შებრუნებული კვადრატების კანონისთვის.

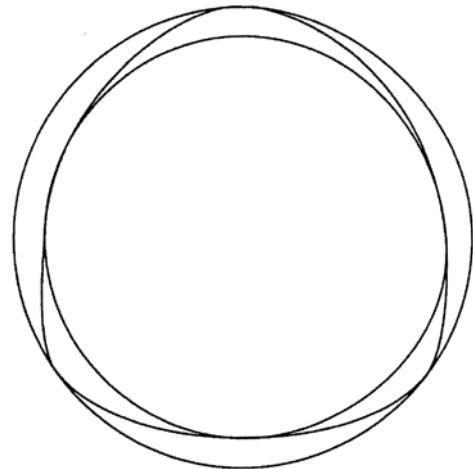


სურ. 3.5. შემოსაზღვრელი მოძრაობის შესაბამისი ორბიტა E_1 -ის პირობებში.



სურ. 3.6. ექვივალენტური ერთგანზომილებიანი პოტენციალი ძალის შებრუნებული კვადრატების კანონისთვის. ნაჩვენებია შემოსაზღვრული მოძრაობა უარყოფითი ენერგიების პირობებში.

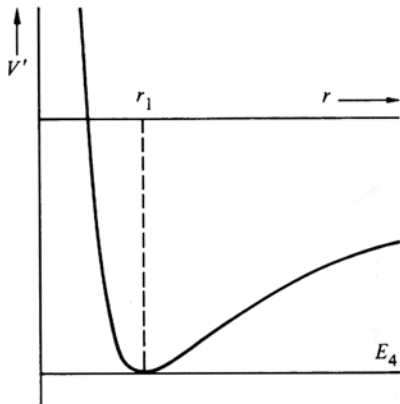
თუ ფიქტიური პოტენციალის მინიმუმზე ენერგია E_4 -ია (სურ. 3.8), მაშინ ორი ზღვარი ერთმანეთს ემთხვევა. ამ შემთხვევაში მოძრაობა მხოლოდ ერთ რადიუსზე ხდება, $\dot{r}=0$ და ორბიტა წრეა. გაიხსენეთ, რომ რეალური „ძალა“ V' გრაფიკის მრუდის შებრუნებულია და წრიული ორბიტისთვის საჭირო პირობის მიხედვით f' ნულის ტოლი უნდა იყოს:



სურ. 3.7. ორბიტების ბუნება შემოსაზღვრული მოძრაობისთვის (3.6 პარაგრაფიდან $\beta=3$)

მივიღეთ წრიული ორბიტის არსებობისთვის საჭირო ელემენტარული პირობა, რომლის თანახმად, მოდებული ძალა ცენტრისკენული აჩქარების „შებრუნებული რეალური ძალის“ ტოლი და მიმართულებით საპირისპირო უნდა იყოს.³ წრიული ორბიტების მახასი-

3 <4 შემთხვევა ფიზიკურად შესაძლო მოძრაობას არ შეესაბამება, ვინაიდან \dot{r}^2 უარყოფითი ანუ \dot{r} წარმოსახვითი უნდა იყოს



სურ. 3.8. ძალის შებრუნებული კვადრატების კანონის ექვივალენტური ერთგანზომილებიანი პოტენციალი. ნაჩვენებია წრიული ორბიტების მდგომარეობა.

ათებლებს და მათი არსებობისთვის საჭირო პირობებს 3 - 6 პარაგრაფებში დეტალურად შევისწავლით.

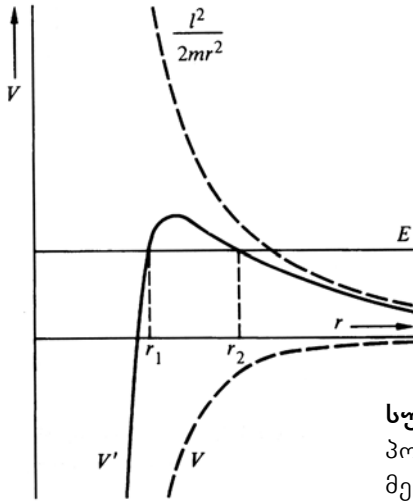
ყურადღება მიაქციეთ, რომ სხვადასხვა ენერგიებისთვის ორბიტების შესწავლა იმპულსის მომენტის ერთი მნიშვნელობის პირობებში მიმდინარეობდა. l -ის ცვლილება V' გრაფიკის რაოდენობრივ დეტალებს ცვლის, მაგრამ ორბიტების სახეობების კლასიფიკაციაზე ზეგავლენას არ ახდენს. მიმზიდველი ძალის შებრუნებული კვადრატების კანონის პირობებში, ორბიტა E_1 -სთვის ჰიპერბოლაა, E_2 -სთვის პარაბოლაა, ხოლო E_3 -სთვის ელიფსია. სხვა ძალების არსებობის შემთხვევაში ორბიტებს ასეთი მარტივი ფორმები შეიძლება არ ჰქონდეთ. მიუხედავად ამისა, ორბიტების ღია, შემოსაზღვრულ და წრიულ სახეობებად დაყოფა ნებისმიერი მიმზიდველი პოტენციალისთვის, რომელიც 1) $1/r^2$ -ზე ნელა მცირდება, როდესაც $r \rightarrow \infty$ ან 2) $1/r^2$ -ზე ნელა ხდება უსასრულო, როდესაც $r \rightarrow 0$, მართებულია. პირველი პირობის თანახმად, როდესაც r საკმარისად დიდია, პოტენციალი ცენტრიდანულ წევრს აღემატება, ხოლო მეორე პირობის თანახმად, როდესაც r საკმარისად მცირეა, ცენტრიდანული წევრი აღემატება პოტენციალს.

მოძრაობის ხარისხობრივი ბუნება იცვლება, თუ პოტენციალი ზემოთ მოყვანილ პირობებს არ აკმაყოფილებს, მაგრამ ორბიტების თვისებების შესწავლისთვის ექვივალენტური პოტენციალის მეთოდის გამოყენება კვლავ შეიძლება. მაგალითისთვის მიმზიდველი პოტენციალი განვიხილოთ:

$$V = (r) = -\frac{a}{r^3}, \quad f = -\frac{3a}{r^4}$$

ენერგიის გრაფიკი 3.9 სურათზეა ნაჩვენები. E ენერგიისთვის მოძრაობის ორი შესაძლო სახეობა გვხვდება, რაც r -ის საწყის მნიშვნელობაზეა დამოკიდებული. თუ $r_0 < r_1$, მაშინ მოძრაობა შემოსაზღვრულია, r ყოველთვის r_1 -ზე ნაკლებია და ნივთიერი წერტილი ძალის ცენტრზე გადაის.

თუ $r_0 > r_2$, მაშინ მოძრაობა შემოსაზღვრულია და ნივთიერი ნერტილი „პოტენციალის“ ხვრელში არასდროს მოხვდება. $r_1 < r_0 < r_2$ საწყისი პირობა ფიზიკურად არარეალურია.



სურ. 3.9. ექვივალენტური ერთგანზომილებიანი პოტენციალი მიმზიდველი ძალის შებრუნებული მეოთხე ხარისხის კანონისთვის.

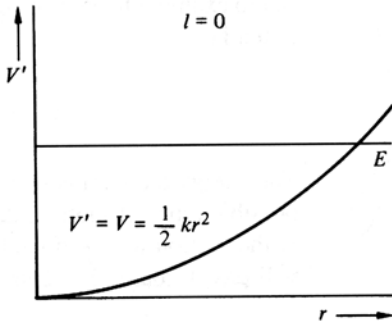
კიდევ ერთი საინტერესო შემთხვევაა როდესაც წრფივი აღმდგენი ძალა მოქმედებს (იზოტროპული ჰარმონიული ოსცილატორის შემთხვევაში):

$$f = -kr, \quad V = \frac{1}{2}kr^2.$$

როდესაც იმპულსის მომენტი ნულის ტოლია მოძრაობა წრფის გასწვრივ ხდება, $V' = V$ და ეს მდგომარეობა 3.10 სურათზეა გამოსახული. მოძრაობა ნებისმიერი დადებითი ენერჯის პირობებში შემოსაზღვრული და მარტივი ჰარმონიულია. როდესაც $l \neq 0$ მდგომარეობა 3.11 სურათზეა გამოსახული. ნებისმიერი ფიზიკურად შესაძლო ენერჯისთვის მოძრაობა შემოსაზღვრულია და ძალის ცენტრის გავლით არ ხდება. ამ შემთხვევაში ორბიტა ელიფსურია, ვინაიდან, თუ $\mathbf{f} = -k\mathbf{r}$, მაშინ ძალის x და y კომპონენტებია:

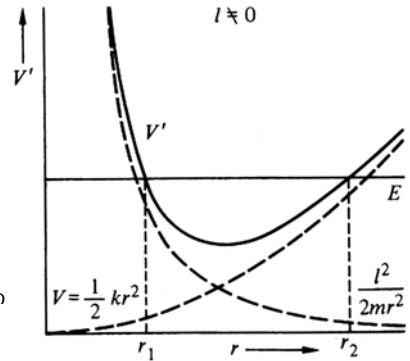
$$f_x = -kx, \quad f_y = -ky.$$

მთლიანი მოძრაობა ორი მარტივი, ჰარმონიული, თანაბარი სიხშირის და მართი კუთხით რხევის შედეგად მიიღება და ორბიტა ელიფსურია.



სურ. 3.11. ექვივალენტური ერთგანზომილებიანი პოტენციალი ნრფივი აღმდგენი ძალისთვის.

სურ. 3.10. ეფექტური პოტენციალი ნულოვანი იმპულსის მომენტის დროს.



კარგად ცნობილი მაგალითია მცირე ამპლიტუდების მქონე სფერული ქანქარა. ლისაჟუს ფიგურები მართი კუთხით ორი სინუსოიდური რხევის გაერთიანების შედეგად მიიღებიან, როდესაც მათი სიხშირეების შეფარდება რაციონალური რიცხვია. ერთი და იგივე სიხშირით ორი რხევისთვის ფიგურა ნრფეა, როდესაც რხევებს ერთნაირი ფაზები აქვთ, ნრეა, როდესაც რხევების ფაზათა სხვაობა 90° , ხოლო სხვა შემთხვევაში ფიგურას ელიფსის ფორმა აქვს. მაშასადამე, ცენტრალური ძალით გამონწვეული მოძრაობა ნრფივი აღმდგენი ძალის პირობებში ლისაჟუს უმარტივეს ფიგურებს წარმოშობს.

3.4 ვირიალის თეორემა

ცენტრალური ძალით გამონწვეული მოძრაობის კიდევ ერთი თვისება სისტემების დიდი სიმრავლისთვის გამოსადეგი ზოგადი თეორემის სახით შეგვიძლია მივიღოთ, რომელსაც ვირიალის თეორემა ეწოდება. ვირიალის თეორემა ადრე მოყვანილი თეორემებისგან განსხვავდება, ვინაიდან ის ბუნებით სტატისტიკურია ანუ სხვადასხვა მექანიკური სიდიდეების დროში საშუალოებს ეხება.

განვიხილოთ ნივთიერი ნერტილებისგან შემდგარი ზოგადი სისტემა, როდესაც მდებარეობის ვექტორებია \mathbf{r}_i -ები, ხოლო მოდებული ძალებია \mathbf{F}_i -ები (ნებისმიერი შეზღუდვის ძალების ჩათვლით). მოძრაობის ფუნდამენტური განტოლებებია:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i \tag{1.3}$$

ჩვენ შემდეგი სიდიდე გვანტერესებს:

$$G = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i,$$

სადაც შეკრება სისტემის ყველა ნივთიერი ნერტილისთვის ხდება. ამ სიდიდის დროით წარმოებულთა :

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{p}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i. \quad (3.23)$$

3.23 ფორმულის პირველი წევრი ასე შეიძლება გარდაიქმნას:

$$\sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i v_i^2 = 2T,$$

ხოლო მეორე წევრი 1.3 ფორმულის დახმარებით ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i.$$

მაშასადამე, 3.23 ფორმულა მარტივდება:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i = 2T + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i. \quad (3.24)$$

3.24 ფორმულის დროით საშუალო მოცემულ τ დროის შუალედში ფორმულის ორივე მხარის 0-დან τ -მდე t -ით ინტეგრების და შემდეგ τ -ზე გაყოფით მიიღება:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt \equiv \overline{\frac{dG}{dt}} = \overline{2T} + \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}$$

ანუ

$$\overline{2T} + \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)]. \quad (3.25)$$

თუ მოძრაობა პერიოდულია ანუ ყველა კოორდინატი გარკვეული დროის შემდეგ მეორდება და τ პერიოდია, მაშინ 3.25 ფორმულის მარჯვენა მხარე ბათილდება. იგივე დასკვნამდე მივალთ მოძრაობის არაპერიოდულობის შემთხვევაშიც, ოღონდ ყველა ნივთიერი ნერტილის კოორდინატები და სიჩქარეები სასრულები უნდა იყვნენ რათა G -ის ზედა ზღვარი ჰქონდეს. თუ τ პერიოდი საკმარისად დიდია, მაშინ 3.25 ფორმულის მარჯვენა მხარე სურვილისამებრ მცირე შეგვიძლია გავხადოთ. მოძრაობის პერიოდულობის თუ არაპერიოდულობის პირობებში:

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}. \quad (3.26)$$

3.26 ფორმულას **ვირიალის თეორემა** ეწოდება, ხოლო მის მას მარჯვენა მხარეს **კლაუზიუსის ვირიალს** უწოდებენ. ამგვარი ფორმით მოცემული თეორემა აირების კინეტიკური ენერჯის თეორიაში საკმაოდ მნიშვნელოვანია, ვინაიდან მისი დახმარებით და ქვემოთ მოყვანილი არგუმენტიდან გამომდინარე, იდეალური აირის კანონი მიიღება.

განვიხილოთ N რაოდენობის ატომებისგან შემდგარი და V მოცულობის ჭურჭელში მოქცეული აირი. დავუშვათ, აირის ტემპერატურა T კელვინია. კინეტიკური თეორიის თანაბრად განაწილების თეორემიდან გამომდინარე, თითოეული ატომის საშუალო კინეტიკური ენერჯიაა $\frac{3}{2}k_B T$, სადაც k_B ბოლცმანის მუდმივაა, ხოლო თავად ეს ფორმულა ტემპერატურის განსაზღვრებაა. 3.26 ფორმულის მარცხენა მხარე იქნება:

$$\frac{3}{2} N k_B T.$$

3.26 ფორმულის მარჯვენა მხარეს მოცემული \mathbf{F}_i ძალები ატომებს შორის მოქმედ ძალებს და სისტემაზე მოქმედ შეზღუდვის ძალებს მოიცავენ. იდეალურ აირში ურთიერთქმედების ძალების ვირიალში მონაწილეობა უმნიშვნელოა. აირი იდეალურია, როდესაც ის საკმარისად გაუხშობებულია და ატომებს შორის შეჯახება ჭურჭლის კედლებთან შეჯახებასთან შედარებით იშვიათად ხდება. ჭურჭლის კედლები სისტემაზე მოქმედ შეზღუდვას ქმნიან, ხოლო შეზღუდვის \mathbf{F}_c ძალები კედლებზე არიან ლოკალიზებულნი და აირის ატომების კედლებთან შეჯახების დროს აქტიურდებიან. 3.26 ფორმულის მარჯვენა მხარეს მოცემული ჯამი ჭურჭლის ზედაპირისთვის ჩანერილი ინტეგრალით შეგვიძლია შევცვალოთ. შეზღუდვის ძალა ატომებიდან კედელზე მოქმედი შეჯახების ძალებზე ანუ P წნევაზე რეაქციაა. თუ \mathbf{n} ერთეულოვანი ვექტორი ჩვეულებისამებრ ზედაპირის გარე პერპენდიკულარია, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$d\mathbf{F}_i = -P \mathbf{n} dA,$$

ანუ

$$\frac{1}{2} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -\frac{P}{2} \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dA.$$

$$\text{გაუსის თეორემიდან გამომდინარე:} \quad \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dA = \int \nabla \cdot \mathbf{r} dV = 3V.$$

ვირიალის თეორემა (3.26 ფორმულა) იდეალური აირისთვის ასე შეიძლება ჩაინერო :

$$\frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} P V,$$

ფორმულის ორივე მხარეს $\frac{3}{2}$ კოეფიციენტი გაბათილდება და იდეალური აირის კანონი დაგვრჩება. იმ შემთხვევაში, როდესაც ნივთიერ წერტილთა ურთიერთქმედების ძალები ვირიალში მონაწილეობას იღებენ, იდეალური აირის კანონი აღარ მოქმედებს. ასეთ შემთხვევაში ვირიალის თეორემა კლასიკურ კინეტიკურ თეორიაში მთავარი იარაღია, რომლითაც არაიდეალური აირების მდგომარეობის განტოლება მიიღება.

ჩვენ შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ თუ \mathbf{F}_i ძალები სიჩქარის პროპორციული \mathbf{f}_i ხახუნის ძალების და სხვა (ხახუნის ძალებისგან განსხვავებული) \mathbf{F}'_i ძალების ჯამია, მაშინ ვირიალი მხოლოდ \mathbf{F}'_i -ზეა დამოკიდებული. ბუნებრივია, სისტემის მოძრაობა ხახუნის ძალების შედეგად არ უნდა შეწყდეს და სისტემას ენერჯია მუდმივად უნდა მიეწოდოს, სხვა

შემთხვევაში \mathcal{T} -ის უსასრულობამდე გაზრდასთან ერთად ყველა საშუალო ნულის ტოლი გახდება (დამტკიცება 1).

თუ ძალები პოტენციალიდან მიიღებინან, მაშინ ვირიალის თეორემა ასეთ სახეს იღებს:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sum_i \overline{\nabla V \cdot \mathbf{r}_i}, \quad (3.27)$$

და ცენტრალური ძალის ზემოქმედებით მოძრავი ერთი ნივთიერი წერტილისთვის შემდეგ სახემდე დაიყვანება:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial V}{\partial r} r}. \quad (3.28)$$

თუ V არის r -ის ხარისხობრივი ფუნქცია:

$$V = ar^{n+1},$$

სადაც ხარისხის მაჩვენებელი ისეა არჩეული, რომ ძალის კანონია r^n , მაშინ:

$$\frac{\partial V}{\partial r} r = (n+1)V,$$

და 3.28 ფორმულა ასეთ სახეს იღებს:

$$\bar{T} = \frac{n+1}{2} \bar{V}. \quad (3.29)$$

ჰომოგენური ფუნქციებისთვის (იხ. გვ. 62) ეილერის თეორემის გამოყენებით ცხადია, რომ 3.29 ფორმულა ვარგისია, როდესაც V არის $n+1$ ხარისხის r -ის ჰომოგენური ფუნქცია. ძალების შეზღუდული კვადრატების კანონის შემთხვევაში $n = -2$ და ვირიალის თეორემა კარგად ცნობილ ფორმას იღებს:

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \bar{V}. \quad (3.30)$$

3.5 დიფერენციალური განტოლება ორბიტისთვის და ინტეგრებადი ხარისხოვანი პოტენციალები

ცენტრალურ ძალებთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნისას კარგი იქნება, თუ ჩვენი მსჯელობის მიმართულებას შევცვლით. აქამდე ამოცანის ამოხსნა r -ის და θ -ის დროზე დამოკიდებულების ფუნქციის პოვნას ნიშნავდა, როდესაც E , l და ა.შ. ინტეგრების მუდმივები იყვნენ. სინამდვილეში ყველაზე ხშირად ორბიტის განტოლება ანუ r -ის θ -ზე დამოკიდებულება (t დროის გამორიცხვით) გვჭირდება. ცენტრალურ ძალებთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნისას დროის გამორიცხვა საკმაოდ ადვილია, ვინაიდან t სიდიდე მოძრაობის განტოლებებში მხოლოდ დიფერენცირების ცვლადის სახით შედის. მართლაც, 3.8 მოძრაობის განტოლება dt დიფერენციალურ ცვლილებასა და შესაბამის $d\theta$ ცვლილებას შორის განსაზღვრულ დამოკიდებულებას გვაძლევს:

$$l dt = mr^2 d\theta. \quad (3.31)$$

t -ით და θ -ით წარმოებულებს შორის შემდეგი დამოკიდებულებაა:

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (3.32)$$

ეს ფორმულები მოძრაობის 3.12 და 3.16 განტოლებების ორბიტის დიფერენციალურ განტოლებაში გარდაქმნისთვის გამოიყენებია. 3.12 ფორმულაში ჩასმა მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას გვაძლევს, ხოლო 3.17 ფორმულაში ჩასმით პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას მივიღებთ.

3.12 ფორმულაში ჩასმა გვაძლევს:

$$\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{mr^3} = f(r), \quad (3.33)$$

თუ $u = 1/r$ აღნიშვნას შემოვიღებთ და შედეგებს პოტენციალის საშუალებით გამოვსახავთ:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{d}{du} V\left(\frac{1}{u}\right). \quad (3.34)$$

3.34 ფორმულიდან მიღებული ორბიტა ორი მიმდებარე შემობრუნების ნერტილისადმი სიმეტრიულია. ამის დასამტკიცებლად ყურადღება მივაქციოთ, რომ თუ ორბიტა სიმეტრიულია, მაშინ ის მობრუნების კუთხის მიმართულების მიმართ ცვლილების გარეშე უნდა აირეკლოს. თუ კოორდინატების არჩევის შედეგად შემობრუნების ნერტილია $\theta = 0$, მაშინ არეკვლა მათემატიკურად θ -ს ნაცვლად $-\theta$ -ით ჩასმით გამოისახება. ორბიტის დიფერენციალური განტოლება (3.34 ფორმულა) ამგვარი ჩასმისას უცვლელია. ქვემოთ მოცემული საწყისი პირობებიც არ იცვლება:

$$u = u(0), \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)_0 = 0, \quad \theta = 0,$$

აქედან გამომდინარე, ორბიტის განტოლება θ -ებში და $-\theta$ -ებში ერთი და იგივეა, რაც ჩვენთვის სასურველი დასკვნაა. **ორბიტა აპსიდალური ვექტორების მიმართ არეკვლისას უცვლელია.** ეს ნიშნავს, რომ სრული ორბიტის გავლება შეიძლება, თუ ნებისმიერ ორ შემობრუნების ნერტილს შორის ორბიტის მონაკვეთი ვიცით. მოცემული მონაკვეთის ერთ-ერთი აპსიდალური ვექტორის გარშემო არეკვლა ორბიტის მიმდებარე ნაწილის გაჩენას იწვევს და ეს პროცესი ორბიტის დასრულებამდე მრავალჯერ მეორდება (იხ. სურ. 3.12).

ორბიტის განტოლების მიღება ნებისმიერი ძალის კანონისთვის 3.17 ამონახსნიდან 3.31 ფორმულის დახმარებით t -ს გამორიცხვით შეიძლება:

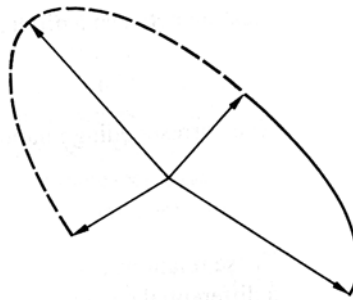
$$d\theta = \frac{l dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2})}}. \quad (3.35)$$

მცირეოდენი გარდაქმნების შემდეგ 3.35 ფორმულის ინტეგრალი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} + \theta_0, \quad (3.36)$$

თუ ინტეგრების ცვლადია $u = 1/r$, მაშინ:

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - u^2}}. \quad (3.37)$$



სურ. 3.12. ორბიტის აგება მისი მონაკვეთის არეკვლის შედეგად აბსიდალური ვექტორების მიმართ.

მოძრაობის განტოლების მსგავსად, 3.37 ფორმულაც ყოველთვის არ არის პრაქტიკულად სასარგებლო ამონახსნი, ვინაიდან ინტეგრალი კარგად ცნობილი ფუნქციების საშუალებით ყოველთვის არ გამოისახება. რეალურად, ძალთა კანონების მხოლოდ გარკვეული სახეობებია გამოკვლეული. ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი \square -ის ხარისხოვანი ფუნქციებია:

$$V = ar^{n+1} \quad (3.38)$$

როდესაც ძალა r -ის n ხარისხზე დამოკიდებული⁴. ამგვარი პოტენციალის პირობებში 3.37 ფორმულა ასეთ სახეს იღებს :

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2} u^{-n-1} - u^2}}. \quad (3.39)$$

4 $n = -1$ შემთხვევა არ განიხილება. ამგვარი მდგომარეობა 3.38 ფორმულით მოცემულ პოტენციალში პოტენციალის მუდმივობას ანუ ძალის არარსებობას ნიშნავს. ასევე ანომალური მდგომარეობაა, როდესაც ხარისხის მაჩვენებელი ძალის კანონში პირდაპირ გამოიყენება, ვინაიდან r^{-1} სახით ცვალებადი ძალა ლოგარითმულ პოტენციალს შეესაბამება, რაც ხარისხოვანი კანონი საერთოდ არ არის. ლოგარითმული პოტენციალი ნერტილის გარშემო მოძრაობისას ჩვეულებრივი არ არის და ის უფრო **წირით** წყაროს მიესადაგება.

3.39 ფორმულა მარტივი ფუნქციების საშუალებით ინტეგრებადი მხოლოდ გარკვეულ შემთხვევებშია. ხარისხის მაჩვენებლები, როდესაც შედეგები ტრიგონომეტრიული ფუნქციების საშუალებით შეიძლება გამოისახონ, შემდეგებია:

$$n = -1, -2 - 3.$$

შემდეგ მნიშვნელობებისთვის მიღებული ინტეგრალების შედეგები ელიფსური ფუნქციების საშუალებით შეიძლება გამოისახონ:

$$n = 5, 3, 0, -4, -5, -7$$

ზემოთ მოყვანილი მნიშვნელობები ხარისხის მთელი მაჩვენებლისთვის წარმოადგენენ ყველა იმ შესაძლებლობას, როდესაც ინტეგრალი მარტივი და კარგად ცნობილი ფუნქციების საშუალებით შეიძლება გამოისახოს. წილად მაჩვენებლებს ელიფსურ ფუნქციებამდე მივყავართ, ხოლო ბევრი სხვა მაჩვენებელი ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების საშუალებით გამოისახება. ტრიგონომეტრიული და ელიფსური ფუნქციები ზოგადი ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების ინტეგრალების კერძო შემთხვევებია. 3.39 ფორმულის რიცხობრივი ინტეგრება ნებისმიერი არაპათოლოგიური პოტენციალისთვის შეიძლება, თუმცა ეს ჩვენი განხილვის საგანი არ არის.

3.6 პირობები ჩაკეტილი ორბიტებისთვის (ბერტრანის თეორემა)

ჩვენ ჯერ კიდევ არ მიგვიღია საკმარისი ინფორმაცია ექვივალენტური ერთგანზომილებიანი ამოცანიდან ან ორბიტის განტოლებიდან მოძრაობის ცხადად ამოხსნის გარეშე. მიმზიდველი ცენტრალური ძალების გარკვეული სახეობებისთვის, რომლებიც **ჩაკეტილი ორბიტების** გაჩენას იწვევენ, შესაძლებელია ძლიერი და საინტერესო თეორემის მიიღება.

ჩაკეტილი ორბიტის ერთი სახეობის, კერძოდ ცენტრალური ძალის ცენტრის გარშემო გავლებული წრის, არსებობის პირობები უკვე მოვიყვანეთ. ნებისმიერი მოცემული l -ისთვის ორბიტა ჩაკეტილი იქნება, თუ $V'(r)$ პოტენციალს რაიმე r_0 მანძილზე მინიმუმი ან მაქსიმუმი გააჩნია და $E = V'(r_0)$. V' -ის ექსტრემუმის არსებობისთვის r_0 -ში f' უნდა ნულის ტოლი იყოს, რაც ადრე მიღებული პირობის იდენტურია (იხ. 3.3 პარაგრაფი):

$$f(r_0) = -\frac{l^2}{mr_0^3}, \quad (3.40)$$

ამ პირობის თანახმად, წრიული ორბიტების არსებობისთვის ძალა მიმზიდველი უნდა იყოს. გარდა ამისა, ნივთიერი წერტილის ენერჯია შემდეგი ფორმულით უნდა გამოითვლებოდეს:

$$E = V(r_0) + \frac{l^2}{2mr_0^2}, \quad (3.41)$$

3.41 ფორმულიდან გამომდინარე, წრიული ორბიტის არსებობისთვის \dot{r} ნულის ტოლი უნდა იყოს. 3.40 და 3.41 ფორმულები საკმაოდ მარტივები და კარგად ცნობილებია. ისინი გვაუწყებენ, რომ ნებისმიერი მიმზიდველი ცენტრალური ძალის პირობებში რაიმე r_0 რადიუსზე წრიული ორბიტა იარსებებს, თუ l სიდიდე 3.40 ფორმულით, ხოლო ნივთიერი წერტილის ენერგია 3.41 ფორმულით გამოითვლება.

წრიული ორბიტის თვისება დამოკიდებულია იმაზე, V' -ს ექსტრემუმი მინიმუმი (როგორც 3.8 სურათზე), თუ მაქსიმუმი (როგორც 3.9 სურათზე). თუ ენერგია l -ის მოცემული მნიშვნელობის პირობებში წრიული ორბიტისთვის საჭირო რაოდენობას აღემატება, მაშინ V' -ის მინიმუმისთვის მოძრაობა წრიული აღარ, მაგრამ მაინც შემოსახლვრული იქნება. თუ V' მაქსიმუმს ავლენს, მაშინ l -ს წრიული მნიშვნელობაზე ოდნავ გადაჭარბების შემთვევაშიც კი მოძრაობა შემოუსახლვრელი იქნება, ხოლო ნივთიერი წერტილი ძალის ცენტრის გავლით და შემდეგ უსასრულობისკენ იმოძრავებს. სტატიკური წონასწორობის ტერმინოლოგიის თანახმად, 3.8 სურათზე გამოსახული წრიული ორბიტა **მდგრადია**, ხოლო 3.9 სურათზე გამოსახული ორბიტა **არამდგრადია**. წრიული ორბიტის მდგრადობას, წრის რადიუსზე V' -ს მეორე რიგის წარმოებულის ნიშანი განსაზღვრავს. დადებითი მეორე რიგის წარმოებულის შემთხვევაში (მაღლა აზნექილი V') ორბიტა მდგრადია, ხოლო უარყოფითი ნიშნის შემთხვევაში (დაბლა ჩაზნექილი V') ორბიტა არამდგრადია. მდგრადი ორბიტა მაშინ არსებობს, როდესაც:

$$\left. \frac{\partial^2 V'}{\partial r^2} \right|_{r=r_0} = - \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{r=r_0} + \frac{3l^2}{mr_0^4} > 0. \quad (3.42)$$

3.40 ფორმულის საშუალებით ეს პირობა ასეც შეიძლება ჩაინეროს:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{r=r_0} < - \frac{3f(r_0)}{r_0}, \quad (3.43)$$

ან

$$\left. \frac{d \ln f}{d \ln r} \right|_{r=r_0} > -3 \quad (3.43')$$

სადაც $f(r_0)/r_0$ მიჩნეულია უარყოფითად და 3.40 ფორმულის r_0 -ზე განაყოფია. თუ ძალა r_0 წრიული რადიუსის მახლობლად r -ის ხარისხის სახით იქცევა

$$f = -kr^n,$$

მაშინ სტაბილურობის პირობა ასე ჩაინერება:

$$\begin{aligned} -knr^{n-1} &< 3kr^{n-1} \\ \text{ანუ} \quad n &> -3, \end{aligned}$$

სადაც k მიჩნეულია დადებითად. ხარისხოვან მიმზიდველ პოტენციალს, რომელიც $1/r^2$ -ზე ნელად იცვლება, r_0 -ის ყველა შესაძლო მნიშვნელობისთვის მდგრადი წრიული ორბიტის შექმნა შეუძლია.

თუ წრიული ორბიტა მდგრადია, მაშინ ნივთიერი ნერტილის ენერჯის წრიული ორბიტისთვის საჭირო მნიშვნელობაზე მეტად გაზრდა r -ის მცირეოდენ ცვლილებას გამოიწვევს r_0 -ის მიმართ. 3.34 ფორმულიდან იოლად მტკიცდება, რომ წრიულობის პირობებიდან ამგვარი მცირე გადახრების დროს ნივთიერი ნერტილი u_0 -ის მიმართ $u (\equiv 1/r)$ -ში მარტივ ჰარმონიულ მოძრაობას ასრულებს:

$$u = u_0 + a \cos \beta \theta. \quad (3.45)$$

a არის წრიული ორბიტებისთვის საჭირო ენერჯის მნიშვნელობიდან გადახრაზე დამოკიდებული ამპლიტუდა, ხოლო $\beta - r_0$ რადიუსის წრიული ორბიტის მიდამოში $f(r)$ ძალის კანონის ტეილორის მწკრივად გაშლიდან მიღებული სიდიდე. ძალის კანონში პირდაპირი ჩასმა მოგვცემს:

$$\beta^2 = 3 + \frac{r}{f} \frac{df}{dr} \Big|_{r=r_0}. \quad (3.46)$$

როდესაც ნივთიერი ნერტილის რადიუს-ვექტორი მთლიან სიბრტყეს შემოწერს, u რხევის β ციკლებს გადის (იხ. სურ. 3.13). თუ β რაციონალური რიცხვია და p/q მთელი რიცხვების შეფარდებაა, მაშინ რადიუს-ვექტორის q -ჯერ შემობრუნების შემდეგ ორბიტა საკუთარი თავის შემოწერას იწყებს და მაშასადამე **ჩაკეტილია**.

r_0 -ის ყველა იმ მნიშვნელობისთვის, როდესაც 3.43 უტოლობა სრულდება, ნივთიერი ნერტილისთვის 3.40 და 3.41 ფორმულებით გამოსახული საწყისი ენერჯის და კუთხური იმპულსის მინიჭების შედეგად მდგრადი წრიული ორბიტის შექმნა შეიძლება.

ჩნდება შეკითხვა: რა ფორმა უნდა მიიღოს ძალის კანონმა, რათა ნებისმიერი ამგვარი წრიული ორბიტის გარშემო მცირეოდენ შეშფოთებული ორბიტა ჩაკეტილი იყოს?

ცხადია, ასეთ პირობებში β არა მხოლოდ რაციონალური რიცხვი, არამედ ყველა შესაძლო მანძილზე, რომელზეც წრიული ორბიტის არსებობა შესაძლებელია, **ერთი და იგივე** რაციონალური რიცხვი უნდა იყოს. სხვა შემთხვევაში β -ს მხოლოდ წყვეტილი მნიშვნელობები შეიძლება ჰქონდეს და რხევის პერიოდების რიცხვი r_0 -თან ერთად დისკრეტულად შეიცვლება, ხოლო დისკრეტულობის პირობებში ჩაკეტილი ორბიტა ვერ იარსებებს.

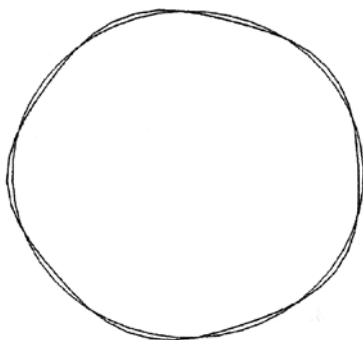
როდესაც β^2 ყველგან მუდმივია, მისი განმსაზღვრელი 3.46 ფორმულა f ძალის კანონის r_0 დამოუკიდებელ ცვლადში მოცემული დიფერენციალური განტოლება ხდება.

3.46 ფორმულა მართლაც შეიძლება r -ის საშუალებით გამოისახოს, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ეს ფორმულა r -ის მნიშვნელობათა მხოლოდ იმ არეშია გამოსადეგი, სადაც მდგრადი წრიული ორბიტების არსებობა შესაძლებელია. 3.46 ფორმულის მცირეოდენი გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{d \ln f}{d \ln r} = \beta^2 - 3, \quad (3.47)$$

ეს ფორმულა ვაინტეგრირებთ და ძალის კანონს მივიღებთ:

$$f(r) = -\frac{k}{r^3 - \beta^2}. \quad (3.48)$$



სურ. 3.13. ცენტრალურ ძალაში არსებული მოძრაობის ორბიტა, რომელიც $\beta = 5$ შემთხვევაში არსებული წრიული ორბიტიდან მცირედენ გადახრილია

ასეთი ფორმის ძალის ყველა კანონი, როდესაც β რაციონალური რიცხვია, წრიული ორბიტისთვის საჭირო პირობებისგან ოდნავ განსხვავებული საწყისი პირობების შემთხვევაში სტაბილურ ჩაკეტილ ორბიტებს გვაძლევს. 3.48 ფორმულით ნებადართულია ძალის შებრუნებული კვადრატების კანონი ($\beta \equiv 1$) და მრავალი სხვა შემთხვევა, მაგალითად $f = -kr^{-2/9}$ ($\beta = \frac{5}{3}$),

დავუშვათ, საწყისი პირობები წრიული ორბიტებისთვის აუცილებელი პირობებისგან საკმარისად განსხვავდებიან. მოგვცემენ თუ არა ძალის იგივე კანონები წრიულ ორბიტებს? შეკითხვას პასუხი გაეცემა, თუ ძალის კანონის ტილორის მწკრივად გაშლაში დამატებით წევრს შევიტანთ და მიღებულ ორბიტის განტოლებას ამოვხსნით.

ჯ. ბერტრანმა ეს ამოცანა 1873 წელს ამოხსნა და აღმოაჩინა, რომ წრიულობიდან პირველი რიგზე უფრო მაღალი გადახრის შემთხვევაში ორბიტები მხოლოდ მაშინ არიან ჩაკეტილები, როდესაც $\beta^2 = 1$ და $\beta^2 = 4$. პირველი მნიშვნელობა შებრუნებული კვადრატების კანონს გვაძლევს, ხოლო მეორე მნიშვნელობა რადიალური მანძილისადმი პროპორციული მიმზიდველი ძალა ანუ ჰუკის კანონია.

ძალის მხოლოდ ამ კანონებს შეუძლიათ l -ის და E -ს ($E < 0$) ნებისმიერი კომბინაციის პირობებში ჩაკეტილი ორბიტების წარმოქმნა და ორბიტის განტოლების პირდაპირი ამონახსნიდანაც იგივე დასკვნას ვიღებთ. აქედან გამომდინარე, ბერტრანის თეორემა ასე უღერს: **ყველა ბმული ნივთიერი წერტილისთვის მხოლოდ ჩაკეტილი ორბიტების მომცემ ცენტრალურ ძალებს მხოლოდ შებრუნებული კვადრატების კანონი და ჰუკის კანონი წარმოადგენენ.**

ბერტრანის თეორემა საკმაოდ მნიშველოვანია და მისი მიღებისთვის საჭირო, მოსაწყენი ალგებრული გარდაქმნები ნამდვილად ღირს ძალისხმევად. ჩვეულებრივი ასტრონომიული დაკვირვებების მიხედვით, ციური სხეულები ორბიტებზე მოძრაობენ და ეს ორ-

ბიტები პირველის რიგის მიახლოების თანახმად ჩაკეტილებია. უმეტეს შემთხვევაში, ჩაკეტილი ორბიტებიდან მცირე გადახრა სხვა სხეულების არსებობას მიეწერება.

ჩაკეტილი ორბიტები საყოველთაოდ გავრცელებულია მზის სისტემასა და ორმაგ ვარსკვლავებში. ჰუკის კანონი ყველა მანძილისთვის გამოსადეგი ძალის კანონის ყველაზე უფრო არარეალური ფორმაა, ვინაიდან მასში შემავალი ძალა უსასრულობამდე იზრდება. სანყისი პირობების დიდ არეში არსებული ჩაკეტილი ორბიტები გვაძლევენ დასკვნის საშუალებას, რომ მიზიდულობის ძალა მანძილის შებრუნებული კვადრატების მიხედვით იცვლება.

იგივე დასკვნა სხვა სიტყვებითაც შეგვიძლია ჩამოვაცალიბოთ. სიბრტყეზე ორბიტული მოძრაობა ორი რხევითი მოძრაობისგან შედგება. ერთი მათგანი r -ით ხდება, ხოლო მეორე θ -ით და მათი პერიოდები ერთმანეთის ტოლებია. **გრავიტაციულ ველში არსებული ორბიტების მახასიათებელი თვისებები ძალის კანონის ფორმას აფიქსირებენ.**

3.7 კეპლერის ამოცანა: ძალების შებრუნებული კვადრატების კანონი

შებრუნებული კვადრატების კანონი ცენტრალური ძალების კანონებიდან ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანია და დეტალურ შესწავლას საჭიროებს. ამ კანონის პირობებში ძალა და პოტენციალი ასეთ სახით ჩაიწერებიან:

$$f = -\frac{k}{r^2} \quad V = -\frac{k}{r}. \quad (3.49)$$

ორბიტის განტოლების ინტეგრება რამდენიმე გზით შეიძლება და მათგან უმარტივესი 3.49 ფორმულის ორბიტის დიფერენციალურ განტოლებაში (3.33) ფორმულის ჩასმაა. ასევე შეგვიძლია 3.39 ფორმულიდან დავინყოთ და მიზიდულობის ძალისთვის n სიდიდე -2-ს გავუტოლოთ:

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}}, \quad (3.50)$$

სადაც ინტეგრალი განუსაზღვრელია. 3.50 ფორმულაში შემავალი θ' სიდიდე სანყისი პირობებით განსაზღვრული ინტეგრების მუდმივაა და $t = 0$ დროის მომენტის θ_0 სანყისი კუთხის ტოლი შეიძლება არ იყოს. ეს განუსაზღვრელი ინტეგრალი სტანდარტული ფორმისაა:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos -\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{q}}, \quad (3.51)$$

სადაც:

$$q = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

ვიდრე 3.50 ფორმულას მივუსადაგებთ, შემდეგი რამ გავითვალისწინოთ:

$$\alpha = \frac{2mE}{l^2}, \quad \beta = \frac{2mk}{l^2}, \quad \gamma = -1, \quad (3.52)$$

ხოლო q დისკრიმინანტია:

$$q = \left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2El^2}{mk^2}\right). \quad (3.53)$$

ჩასმების შემდეგ 3.50 ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\theta = \theta' - \arccos \frac{\frac{l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk}}}. \quad (3.54)$$

საბოლოოდ $u(\equiv 1/r)$ -სთვის ამოვხსნათ და ორბიტის განტოლება იქნება:

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta')\right). \quad (3.55)$$

3.55 ფორმულის თანახმად, ინტეგრების θ მუდმივა ორბიტის შემობრუნების ერთ-ერთი კუთხეა. ყურადღება მიაქციეთ, რომ ორბიტის განტოლებაში ინტეგრების ოთხი მუდმივადან მხოლოდ სამი შედის და ორბიტას ეს ყოველთვის ახასიათებს. მეოთხე მუდმივა ორბიტაზე ნივთიერი წერტილის სანყის მდებარეობას განსაზღვრავს. თუ მხოლოდ ორბიტის განტოლება გვინტერესებს, მაშინ ეს ინფორმაცია უსარგებლოა და პასუხშიც არ ჩანს. როდესაც სრული ამონახსნის პოვნა ანუ r -ის და θ -ის დროის ფუნქციების სახით გამოთვლა გვსურს, გამოტოვებული მუდმივა საჭიროა. აქედან გამომდინარე, თუ იმპულსის მომენტის შენახვის თეორემას,

$$mr^2 d\theta = l dt,$$

3.55 ფორმულის საშუალებით ვაინტეგრებთ, θ_0 სანყისი კუთხე დამატებით უნდა განვსაზღვროთ.

კონუსის ზოგადი განტოლება, როდესაც ერთი ფოკუსი ათვლის სათავეს ემთხვევა, იქნება:

$$\frac{1}{r} = C[1 + e \cos(\theta - \theta')], \quad (3.56)$$

სადაც e არის კონუსური კვეთის ექსცენტრისიტეტი. 3.55 ფორმულასთან შედარებიდან გამომდინარე, ორბიტა ყოველთვის კონუსური კვეთაა და მისი ექსცენტრისიტეტია:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}. \quad (3.57)$$

ორბიტის ბუნება e სიდიდეზე შემდეგი სქემის მიხედვით არის დამოკიდებული:

$$\begin{array}{lll} e > 1 & E > 0: & \text{ჰიპერბოლა,} \\ e = 1 & E = 0: & \text{პარაბოლა,} \end{array}$$

$$e < 1, \quad E < 0: \quad \text{ელიფსი,}$$

$$e = 0, \quad E = -\frac{mk^2}{2l^2}: \quad \text{წრენიერი.}$$

ორბიტების ასეთი კლასიფიკაცია ექვივალენტური ერთგანზომილებიანი V პოტენციალის ენერჯის გრაფიკზე მოცემული ორბიტების ხარისხობრივ განხილვასთან შესაბამისობაშია. წრიული მოძრაობისთვის საჭირო პირობა ამჯერად ოდნავ განსხვავებული ფორმითაა წარმოდგენილი, მაგრამ მისი მიღება წრიულობის ადრე მოყვანილი პირობებიდან იოლად შეიძლება. წრიული ორბიტის შემთხვევაში T და V დროში მუდმივებია და ვირიალის თეორემიდან გამომდინარე:

$$E \equiv T + V = -\frac{V}{2} + V = \frac{V}{2}. \quad \text{მაშასადამე:}$$

$$E = -\frac{k}{2r_0}. \quad (3.58)$$

3.41 ფორმულიდან ანუ ცენტრალურ ძალასა და „ეფექტურ ძალას“ შორის წონასწორობის მტკიცებიდან გამომდინარე:

$$\frac{k}{r_0^2} = \frac{l^2}{mr_0^3},$$

ანუ

$$r_0 = \frac{l^2}{mk}. \quad (3.59)$$

ორბიტის რადიუსისთვის ამგვარი ფორმულის მიღების შემდეგ 3.58 ფორმულა გვაძლევს:

$$E = -\frac{mk^2}{2l^2},$$

სწორედ ეს არის წრიული მოძრაობისთვის საჭირო პირობა.

ელიფსური ორბიტის შემთხვევაში შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ დიდი ლერძი მხოლოდ ენერჯიაზეა დამოკიდებული და ამ თეორემას ბორის ატომის თეორიაში დიდი მნიშვნელობა აქვს. დიდი ნახევარღერძი r_1 და r_2 აპსიდალური მანძილების ნახევარჯამია (იხ. სურ. 3.6). განსაზღვრების თანახმად, რადიალური სიჩქარე ამ წერტილებში ნულის ტოლია და ენერჯის შენახვიდან გამომდინარე, აპსიდალური მანძილები შემდეგი განტოლების ფესვებია (3.15 ფორმულა):

$$E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} = 0,$$

ანუ

$$r^2 + \frac{k}{E}r - \frac{l^2}{2mE} = 0. \quad (3.60)$$

კვადრატული განტოლების წრფივი წევრის კოეფიციენტი სანინაალმდეგო ნიშნით ფესვების ჯამის ტოლია. აქედან გამომდინარე, დიდი ნახევარღერძია:

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{k}{2E}. \quad (3.61)$$

ყურადღება მიაქციეთ, რომ წრიულ ზღვარში 3.61 ფორმულა 3.58 ფორმულასთან შესაბამისობაშია. ელიფსის ექსცენტრისიტეტი დიდი ნახევარღერძის საშუალებით ასე შეიძლება ჩაინეროს:

$$e = \sqrt{1 - \frac{l^2}{mka}}, \quad (3.62)$$

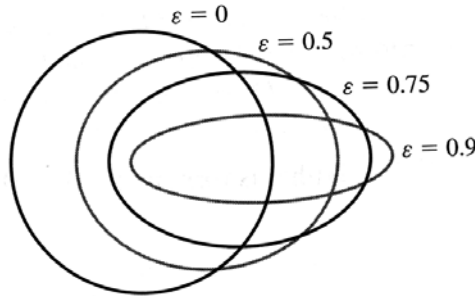
3.62 ფორმულის საშუალებით შემდეგ გამოსახულებას ვიღებთ:

$$\frac{l^2}{mk} = a(1 - e^2), \quad (3.63)$$

3.63 ფორმულის დახმარებით ელიფსური ორბიტის განტოლება (3.55 ფორმულა) ასე ჩაინერება:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \theta')}. \quad (3.64)$$

3.64 ფორმულიდან გამომდინარე, აპსიდალური მანძილები (რომლებიც მაშინ გვხვდება, როდესაც $\theta - \theta' = 0$ -ის და π -ის ტოლია) $a(1 - e)$ -ის და $a(1 + e)$ -ის ტოლებია, რაც ელიფსის თვისებებიდან გამომდინარე, მოსალოდნელიც იყო.

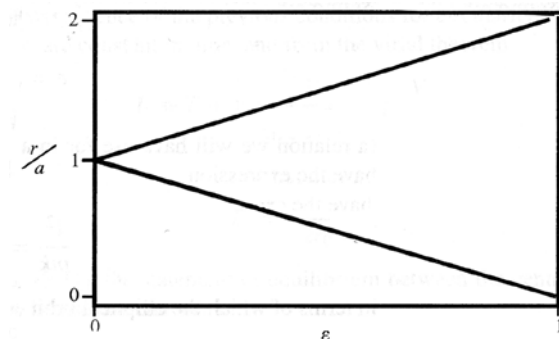


სურ. 3.14. ერთი და იგივე დიდი ნახევარღერძების და 0-დან 0,9-მდე ექსცენტრისიტეტების მქონე ელიფსები

3.14 სურათზე გამოსახულია ერთი და იგივე ა დიდი ნახევარღერძის და ერთი და იგივე ენერჯიის მქონე ოთხი ელიფსური ორბიტა. ორბიტების ექსცენტრისიტეტებია $\epsilon=0$; 0,5; 0,75 და 0,9. 3.15 სურათზე გამოსახულია, თუ როგორ არიან r_1 და r_2 დამოკიდებულნი ϵ ექსცენტრისიტეტზე.

ნივთიერი ნერტილის V_0 სიჩქარის ვექტორი ელიფსური ტრაექტორიის გასწვრივ $V_r = \dot{r} = p_r/m$ რადიალურ კომპონენტად და $V_\theta = r\dot{\theta} = l/mr$ კუთხურ კომპონენტად შეგვიძლია დავშალოთ:

$$V_i = V_r \hat{r} + V_\theta \hat{\theta}.$$

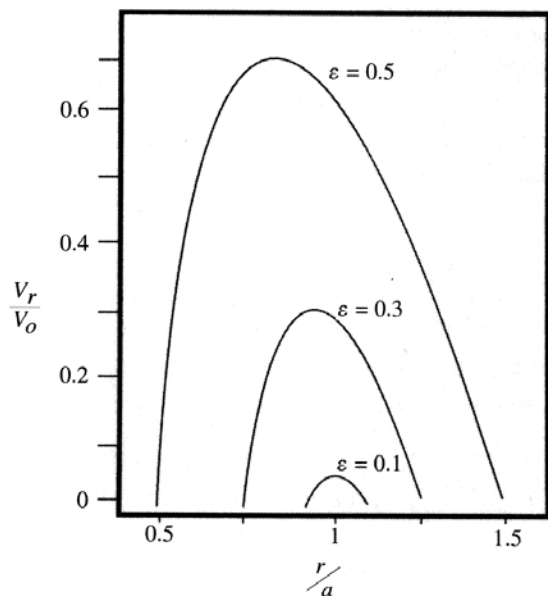


სურ. 3.15. ნორმალიზებული r_1 (ქვედა წრფე) და r_2 (ზედა წრფე) აპსიდალური მანძილების დამოკიდებულება ϵ ექსცენტრისიტეტზე

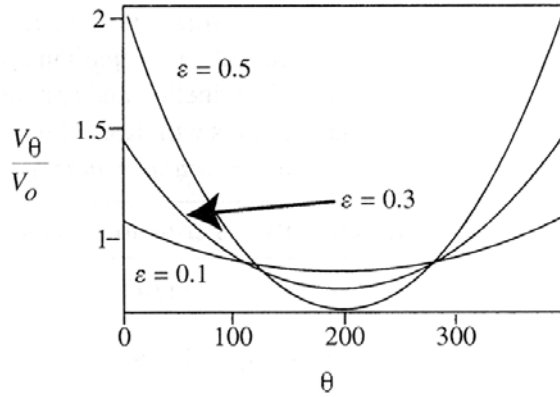
$V_r = \epsilon V_0 \sin\theta / (1 - \epsilon^2)$ მოდულის რადიალური კომპონენტი ორ აპსიდალურ მანძილზე ნულის ტოლი ხდება, ხოლო V_θ მაქსიმალურ მნიშვნელობას პერიჰელიონზე და მინიმალურ მნიშვნელობას აფელიონზე იძენს. 3.1 ცხრილში აპსიდალურ მანძილებზე არსებული კუთხური სიჩქარეები რამდენიმე ექსცენტრისიტეტისთვისაა ჩამოთვლილი. 3.16 სურათზე სიჩქარის V_r რადიალური კომპონენტის \mathbf{r} რადიუს-ვექტორზე დამოკიდებულების გრაფიკი ნახევარციკლისთვისაა გამოსახული, როდესაც V_r გარეთ არის მიმართული ანუ დადებითია. დარჩენილი ნახევარციკლის განმავლობაში V_r უარყოფითია და 3.16 სურათის გრაფიკი 0-ზე მცირე მნიშვნელობათა არეში შეორდება (არ არის ნაჩვენები). 3.17 სურათზე გამოსახულია კუთხური სიჩქარის V_θ კომპონენტის θ კუთხეზე დამოკიდებულების ანალოგიური გრაფიკი. ეს გრაფიკები და ცხრილში მოცემული სიჩქარეები a დიდი ნახევარღერძის და a რადიუსის წრის მქონე ელიფსურ ორბიტებისთვის იმპულსის მომენტის მუდმივობის $l = mr^2\dot{\theta} = mrv_\theta = ma^2\dot{\theta}_0 = mav_0$ ტოლობებიდან მიღებული v_0 და θ_0 სიდიდეებისადმი ნორმალიზებულებია.

ცხრილი 3.1 $\dot{\theta}$ და $v_\theta = r\dot{\theta}$ ნორმალიზებული კუთხური სიჩქარეები პერიპელიონში r_1 და აფელიონში r_2 სხვადასხვა ექსცენტრისიტეტების ε მქონე კეპლერის ორბიტებისთვის. პერიპელიონში და აფელიონში ნორმალიზებული რადიალური მანძილები მეორე და მესამე სვეტებშია ჩამოთვლილი. ნორმალიზება a რადიუსის წრეზე და $l = mav_0 = ma^2\dot{\theta}_0$. იმპულსის მომენტის პირობებში მოძრაობისადმი ხდება.

ექსცენტრი- სიტეტი	პერიპე- ლიონი r_1/a	აფელიონი r_2/a	კუთხური სიჩქარე		წრფივი კუთხური სიჩქარე	
			$\dot{\theta}_1/\dot{\theta}_0$	$\dot{\theta}_2/\dot{\theta}_0$	$v_{\theta 1}/v_0$	$v_{\theta 2}/v_0$
ε	$1-\varepsilon$	$1+\varepsilon$	$1/(1-\varepsilon)^2$	$1/(1+\varepsilon)^2$	$1/(1-\varepsilon)$	$1/(1+\varepsilon)$
0	1	1	1	1	1	1
0,1	0,9	1,1	1,234	0,826	1,111	0,909
0,3	0,7	1,3	2,041	0,592	1,429	0,769
0,5	0,5	1,5	4	0,444	2	0,667
0,7	0,3	1,7	11,111	0,346	3,333	0,588
0,9	0,1	1,9	100	0,277	10	0,526



სურ. 3.16. ნორმალიზებული რადიალური v_r სიჩქარის r -ზე დამოკიდებულების გრაფიკები ε ექსცენტრისიტეტის სამი მნიშვნელობისთვის



სურ. 3.17. ნორმალიზებული ორბიტული v_θ სიჩქარის θ -ზე დამოკიდებულების გრაფიკები \mathcal{E} ექსცენტრისიტეტის სამი მნიშვნელობისთვის

3.8 დროში მოძრაობა კეპლერის ამოცანაში

ცენტრალური ძალის შებრუნებული კვადრატების კანონით მოცემული მოძრაობის ორბიტული განტოლება საკმაოდ მარტივად შეიძლება ამოიხსნას და მიღებული შედეგები ასევე მარტივად გამოისახონ. დროში მოძრავი ნივთიერი წერტილის მოძრაობის აღწერა, როდესაც ის ორბიტას შემოწერს, უფრო რთულია. ნივთიერი წერტილის r რადიალურ მანძილსა და დროს (რაიმე სანყის წერტილის მიმართ) შორის დამოკიდებულება 3.18 ფორმულით მოიცემა, რომელიც შემდეგ სახეს იღებს:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} + E}}. \quad (3.65)$$

θ პოლარული კუთხე და დრო ერთმანეთს იმპულსის მომენტის შენახვის საშუალებით უკავშირდებიან:

$$dt = \frac{mr^2}{l} d\theta,$$

ამ ფორმულის ორბიტის 3.55 განტოლებასთან გაერთიანება გვაძლევს:

$$t = \frac{l^3}{mk^2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{[1 + e \cos(\theta - \theta')]^2}. \quad (3.66)$$

ორივე ინტეგრალის გამოთვლა ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით შეიძლება. მიუხედავად ამისა, ფორმულები საკმაოდ რთულებია და მათი საშუალებით r -ის ან θ -ის t დროზე დამოკიდებულების ფუნქციად გამოთვლა საკმაოდ დიდ სიძნელებთან არის დაკავშირებული, განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც მაგალითად ასტრონომიული დაკვირვებისათვის გამოთვლების მაღალი სიზუსტეა საჭირო.

სირთულების უკეთ დასანახად პარაბოლური მოძრაობა ($e = 1$) განვიხილოთ, როდესაც ინტეგრება ყველაზე უფრო იოლია. ბრტყელი პოლარული კუთხე მაქსიმალური მიახლოების წერტილის რადიუს-ვექტორიდან ავთვალთ. ამ წერტილს *პერიჰელიონის* უწოდებენ⁵. ასეთი აღნიშვნის შემთხვევაში ორბიტის 3.56 განტოლებაში შემავალი θ' ნულის ტოლია. შესაბამისად, დრო პერიჰელიონზე გავლის T მომენტიდან იზომება. გამოვიყენოთ შემდეგი ტრიგონომეტრიული იგივეობა:

$$1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

პარაბოლური მოძრაობისთვის 3.66 ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$t = \frac{l^3}{4mk^2} \int_0^\theta \sec^4 \frac{\theta}{2} d\theta.$$

ინტეგრების პროცესი გამარტივდება, თუ ცვლადად $x = \tan(\theta/2)$, ავიღებთ:

$$\begin{aligned} \text{ანუ} \quad t &= \frac{l^3}{2mk^2} \int_0^{\tan(\theta/2)} (1+x^2) dx, \\ t &= \frac{l^3}{2mk^2} \left(\tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

ამ ფორმულაში $-\pi < \theta < \pi$, სადაც ნივთიერი წერტილი უსასრულოდ მოშორებული $\theta = -\pi$ მდებარეობიდან $t \rightarrow -\infty$ დროის მომენტში გამოდის. $t = 0$ დრო $\theta = 0$ მდგომარეობას შეესაბამება და ამ დროს ნივთიერი წერტილი პერიჰელიონზეა. და ბოლოს $t \rightarrow +\infty$ შეესაბამება $\theta \rightarrow \pi$ მდგომარეობას, როდესაც ნივთიერი წერტილი უსასრულოდ შორს გადაადგილდება. ეს არის t -ის θ -ზე დამოკიდებულების პირდაპირი ფუნქცია. მოცემული დროის მომენტისათვის θ -ს გამოსათვლელად კუბური განტოლება $\tan(\theta/2)$,

⁵ ეს ტერმინი მხოლოდ მზის გარშემო არსებულ ორბიტებზე უნდა ვრცელდებოდეს, ხოლო უფრო ზოგადი ტერმინია *პერიაპსისი*. მიუხედავად ამისა, ძალის ცენტრის მდებარეობის მიუხედავად დღესდღეობით სწორედ ტერმინ პერიჰელიონს ხმარობენ. მთვარის გარშემო კოსმოსური ხომალდის მოძრაობის შემთხვევაშიც კი ორბიტული პარამეტრების აღწერისას პერიჰელიონს იყენებენ, თუმცა უფრო ზუსტი ტერმინი პერიციცტიონია.

-სთვის უნდა ამოვხსნათ და შემდეგ შესაბამისი არქტანგენსი მოვძებნოთ. მოცემული დროის მომენტისათვის არსებულ რადიალურ მანძილს ორბიტული განტოლება იძლევა.

ელიფსური მოძრაობისას 3.65 ფორმულის ინტეგრება ψ პირობითი ცვლადითაა მოსახერხებელი, რომელსაც *ექსცენტრიული ანომალია*⁶ ეწოდება და ასე განისაზღვრება:

$$r = a(1 - e \cos \psi).$$

3.68 ფორმულის ორბიტის 3.64 განტოლებასთან შედარება ცხადყოფს, რომ ψ ასევე 0-დან 2π -მდე შუალედს ფარავს, როდესაც θ სრულ ბრუნს შემოწერს. პერიპელიონი $\psi = 0$ წერტილშია (სადაც $\theta = 0$), ხოლო აფელიონი $\psi = \pi = \theta$. წერტილში.

E და l -ი გამოვსახოთ a -ს, e -ს და k -ს საშუალებით და 3.65 ფორმულა ელიფსური მოძრაობისთვის ასე ჩაინერება:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{2a} - \frac{a(1-e^2)}{2}}}, \quad (3.69)$$

სადაც r_0 პერიპელიონის მანძილია. 3.68 ფორმულიდან r ψ -ს საშუალებით გამოვსახოთ და გარდაქმნების შემდეგ ინტეგრალი გამარტივდება:

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int_0^\psi (1 - e \cos \psi) d\psi. \quad (3.70)$$

3.70 ფორმულა ელიფსური მოძრაობის τ პერიოდის გამოსახულებას გვაძლევს, თუ ინტეგრება ψ -ის ცვლილების 2π სრულ არეში:

$$\tau = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.71)$$

ასევე მნიშვნელოვანი შედეგებს ვიღებთ ელიფსის თვისებებიდან. იმპულსის მომენტის შენახვიდან გამომდინარე, სექტორული სიჩქარე მუდმივია და შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2m}. \quad (3.72)$$

ორბიტის ფართობი A 3.72 ფორმულის მთლიანი τ პერიოდისთვის ინტეგრების შედეგად გამოითვლება:

$$\int_0^\tau \frac{dA}{dt} dt = A = \frac{l\tau}{2m}.$$

⁶ შუა საუკუნეებში მოღვაწე ასტრონომები კუთხურ მოძრაობას თანაბრად მიიჩნევდნენ. პერიპელიონის უკანასკნელად გავლის შემდეგ ათვლილი კუთხე საშუალო კუთხური სიჩქარის (2π /პერიოდი) დროზე გამრავლების შედეგად გამოითვლებოდა და მას საშუალო ანომალია ეწოდებოდა. საშუალო ანომალიის საშუალებით ექსცენტრიულ ანომალიას თვლიდნენ და შემდეგ მას ნამდვილი ანომალიის გასაგებად იყენებდნენ. □ კუთხეს დღესდღეობითაც ნამდვილი ანომალია ეწოდება.

ელიფსის ფართობია:

$$A = \pi ab,$$

სადაც, ექსცენტრისიტეტის განსაზღვრების თანახმად, b მცირე ნახევარღერძსა a -ს შორის შემდეგი დამოკიდებულებაა:

$$b = a\sqrt{1 - e^2}.$$

3.62 ფორმულის საშუალებით მცირე ნახევარღერძი ასეც შეიძლება გამოისახოს:

$$b = a^{1/2} \sqrt{\frac{l^2}{mk}},$$

და ამიტომ პერიოდია:

$$\tau = \frac{2m}{l} \pi a^{3/2} \sqrt{\frac{l^2}{mk}} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

3.71 ფორმულის თანახმად, პერიოდის კვადრატი დიდი ნახევარღერძის კუბის პროპორციულია, თუ ყველა სხვა სიდიდე ერთნაირია. ამ დასკვნას ხშირად კეპლერის მესამე კანონს უწოდებენ⁷. კეპლერი მზის მიზიდულობის ველში მოძრავე პლანეტებს აკვირდებოდა. კეპლერის მესამე კანონი უფრო ზუსტად ასე ჟღერს: **სხვადასხვა პლანეტების პერიოდების კვადრატი მათი დიდი ღერძების კუბის პროპორციულია**. კანონის ამგვარი ფორმა მხოლოდ მიახლოებით არის ჭეშმარიტი. გაიხსენეთ, რომ მზის გარშემო პლანეტის მოძრაობა ორ სხეულთან დაკავშირებული ამოცანაა და 3.71 ფორმულაში m მასა დაყვანილი მასით უნდა შეიცვალოს:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

სადაც m_1 პლანეტის მასად მივიჩნიეთ, ხოლო m_2 მზის მასად. ამასთან ერთად მიზიდულობის გრავიტაციული კანონია:

$$f = -G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

ასე რომ k მუდმივაა:

$$k = Gm_1 m_2.$$

ამგვარ პირობებში 3.71 ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

⁷ პლანეტების მოძრაობასთან დაკავშირებული კეპლერის სამი კანონი დაახლოებით 1610 წელს გამოქვეყნდა და მათ საფუძვლად პლანეტებზე ჩატარებული დაკვირვებები ედოთ. იგივე კანონებმა საფუძველი ნიუტონის დიდებულ აღმოჩენებს ჩაუყარეს. სექტორული სიჩქარის მუდმივობის შესახებ კეპლერის მეორე კანონი ცენტრალური ძალით გამოწვეული მოძრაობის ზოგადი თეორემაა. კეპლერის პირველი კანონი მზის გარშემო პლანეტების ელიფსურ მოძრაობის შესახებაა, რომლის ერთ ფოკუსში მზე მდებარეობს, ხოლო კეპლერის მესამე კანონი მხოლოდ შებრუნებული კვადრატების კანონის ძალებზე ვრცელდება.

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} \approx \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_2}}, \quad (3.74)$$

თუ პლანეტის მასას მზის მასასთან შედარებით უმნიშვნელოდ მივიჩნევთ. კეპლერის მესამე კანონი 3.74 ფორმულის მიახლოებითი ვერსიას, ვინაიდან ამ ფორმულის თანახმად, τ პროპორციულია $a^{3/2}$ -ისადმი და პროპორციულობის მუდმივა ყველა პლანეტისთვის ერთნაირია. მიუხედავად ზემოთქმულისა, პლანეტის m_1 მასა მზის მასასთან შედარებით ყოველთვის უმნიშვნელო არ არის. მაგალითად, იუპიტერის მასა მზის მასის მხოლოდ 0,1%-ია. კეპლერის მესამე კანონი სრულიად ჭეშმარიტია ბორის ატომის ელექტრონების ორბიტებისთვის, ვინაიდან μ და k მოცემული ატომის ყველა ორბიტისთვის თანაბარია.

ელიფსური ორბიტისთვის დროში მდებარეობის ამოცანაზე დაბრუნებისთვის 3.70 ფორმულა ხელახლა გადავწეროთ და ω ბრუნვის სიხშირე ასე გამოვსახოთ:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{k}{ma^3}}. \quad (3.75)$$

3.70 ფორმულაში ინტეგრება ძალიან ადვილია და შემდეგ ფორმულას გვაძლევს:

$$\omega t = \psi - e \sin \psi,$$

რომელსაც *კეპლერის განტოლება* ეწოდება. ωt სიდიდე ψ -სთან და θ -სთან ერთად 0-დან 2π -მდე შუალედში იცვლება სრული ორბიტული ბრუნის შედეგად და ამიტომ ისიც ანომალიაა, კერძოდ *საშუალო ანომალიაა*.

t მოცემულ დროში ორბიტაზე მდებარეობის დასადგენად კეპლერის 3.76 განტოლება უნდა შევაბრუნოთ, რათა შესაბამისი ψ ექსცენტრული ანომალია მივიღოთ. ამის შემდეგ 3.68 ფორმულა რადიალურ მანძილს მოგვცემს, ხოლო 3.68 ფორმულის და 3.64 ფორმულის შედარების შედეგად θ პოლარული კუთხე ψ -ს საშუალებით გამოისახება:

$$1 + e \cos \theta = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos \psi}.$$

ალგებრული გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:

$$\cos \theta = \frac{\cos \psi - e}{1 - e \cos \psi}. \quad (3.77)$$

თუ 3.77 ფორმულის ორივე მხარეს თანმიმდევრობით დავუმატებთ და გამოვაკლებთ ერთს და შედეგად მიღებული ორ ფორმულის შეფარდებას ავიღებთ, ასეთი სახის ფორმულას მივიღებთ:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\psi}{2}. \quad (3.78)$$

თუ ψ ცნობილია, θ კუთხეს როგორც 3.77, ასევე 3.78 ფორმულა გვაძლევს. კეპლერის ტრანსცენდენტური განტოლების (3.76 ფორმულა) ამოხსნა, მოცემული დროის შეს-

აბამისი ψ -ის მნიშვნელობის დასადგენად, ბევრმა ცნობილმა მათემატიკოსმა სცადა. მაგალითად, ნიუტონმა დღესდღეობით ანალოგურ ამოხსნად წოდებული გამოსავალი შემოგვთავაზა. მართლაც, კეპლერის განტოლების მთლიან არეში კუთხური სეკუნდის სიზუსტით ამოხსნის პრაქტიკულმა საჭიროებამ მე-18 და მე-19 საუკუნეების მათემატიკაში ბევრი სიახლე შემოიტანა. კომპიუტერამდელ ეპოქაში განტოლების ამოხსნის 100-ზე მეტი მეთოდი შეიმუშავეს და რამდენიმე მათგანი მოცემული თავის სავარჯიშოებშიც განხილულია.

3.9 ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი

კეპლერის ამოცანას იმპულსის მომენტის გარდა სხვა დამატებითი მუდმივი ვექტორების არსებობაც ახასიათებს. ზოგადი ცენტრალური ძალის შემთხვევაში, ნიუტონის მოძრაობის მეორე კანონი ვექტორული ფორმით ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\dot{\mathbf{p}} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.79)$$

$\dot{\mathbf{p}}$ -ს და \mathbf{L} მუდმივი იმპულსის მომენტის ვექტორის ვექტორული ნამრავლია:

$$\begin{aligned} (3.80) \quad \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} &= \frac{mf(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] \\ &= \frac{mf(r)}{r} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - r^2 \dot{\mathbf{r}}]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

3.80 ფორმულა გამარტივდება, თუ გავითვალისწინებთ, რომ:

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = r\dot{r}.$$

ვინაიდან \mathbf{L} მუდმივია, 3.80 ფორმულა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) &= -mf(r)r^2 \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}}{r^2} \right), \\ \text{ან} \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) &= -mf(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right). \end{aligned} \quad (3.81)$$

$f(r)$ -ის ფორმის განსაზღვრის გარეშე შორს ვერ წავალთ, მაგრამ 3.81 ფორმულის ინტეგრება შესაძლებელია, თუ $f(r)$ უკუპროპორციულია r^2 -ისადმი (კეპლერის ამოცანა). $f(r)$ 3.49 ფორმულის სახით ჩავწეროთ და 3.81 ფორმულა მოგვცემს:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{mk\mathbf{r}}{r} \right),$$

რაც მიუთითებს, რომ კეპლერის ამოცანაში **მუდმივი ვექტორი** არსებობს:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.82)$$

3.82 ფორმულაში შემავალ სამ ვექტორს შორის დამოკიდებულება და \mathbf{A} -ს მუდმივობა 3.18 სურათზე ასახული, რომელზეც სამივე ვექტორი ორბიტაზე სხვადასხვა მდებარეობაზეა. ბოლო დროს ფიზიკოსები ამ ვექტორს რუნგე-ლენცის ვექტორს უწოდებენ, მაგრამ პრიორიტეტი ლაპლასს ეკუთვნის.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0, \quad (3.83)$$

ვინაიდან \mathbf{L} პერპენდიკულარულია $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$ -ისადმი, ხოლო \mathbf{r} პერპენდიკულარულია $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ -ისადმი. \mathbf{A} -ს \mathbf{L} -ისადმი ორთოგონალობიდან გამომდინარე, \mathbf{A} ორბიტის სიბრტყეში მდებარე რაიმე ფიქსირებული ვექტორი უნდა იყოს. თუ θ კუთხეა \mathbf{r} -სა და \mathbf{A} -ს ფიქსირებულ მიმართულებას შორის, მაშინ \mathbf{r} -ის და \mathbf{A} -ს სკალარული ნამრავლია:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos \theta = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - mkr. \quad (3.84)$$

შერეულ ნამრავლში ნევრების გადანაცვლების შედეგად მივიღებთ:

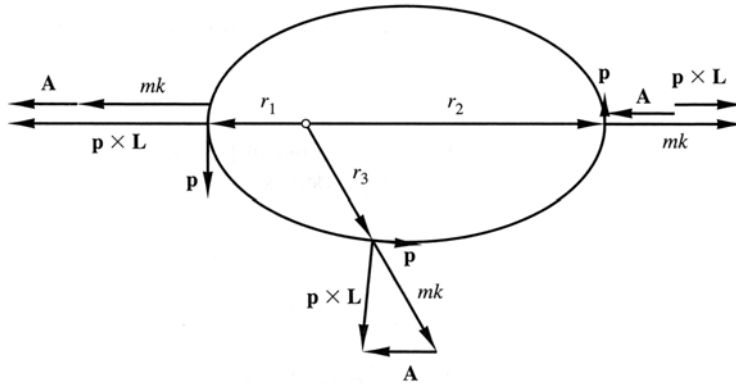
$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = l^2,$$

ასე რომ 3.84 ფორმულა გვაძლევს:

$$Ar \cos \theta = l^2 - mkr,$$

ანუ

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left(1 + \frac{A}{mk} \cos \theta \right). \quad (3.85)$$



სურ. 3.18. \mathbf{p} , \mathbf{L} და \mathbf{A} ვექტორები კეპლერის ორბიტაზე სამ მდებარეობაზე. პერიჰელიონზე (მარცხენა კიდეზე) $|\mathbf{p} \times \mathbf{L}| = mk(1 + e)$, ხოლო აფელიონზე (მარჯვენა კიდეზე) $|\mathbf{p} \times \mathbf{L}| = mk(1 - e)$. \mathbf{A} ვექტორის მიმართულება ყოველთვის იგივეა და მისი მოდულია mke .

ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი კეპლერის ამოცანაში ორბიტის განტოლების მიღების კიდევ ერთი საშუალებაა. 3.85 ფორმულის 3.55 ფორმულით მოცემულ ორბიტის განტოლებასთან შედარება ცხადყოფს, რომ \mathbf{A} -ს მიმართულება ორბიტაზე მდებარე პერიჰელიონის ნერტილისკენ მიმართული რადიუს-ვექტორის მიმართულებას ემთხვევა და მისი მოდულია:

$$A = mke. \quad (3.86)$$

კეპლერის ამოცანაში მოძრაობის \mathbf{L} და \mathbf{A} ვექტორული მუდმივები და E სკალარული მუდმივა განვსაზღვრეთ. ვინაიდან ვექტორს სამივე დამოუკიდებელი კომპონენტი უნდა ჰქონდეს, მთლიანად შვიდი მუდმივი სიდიდე არსებობს. თავისუფლების სამი ხარისხის მქონე სისტემას მოძრაობის ექვსი დამოუკიდებელი მუდმივა აქვს, რაც ნივთიერი ნერტილის სანყისი მდებარეობის და სანყისი სიჩქარის სამ-სამ კომპონენტს შეესაბამება. მოძრაობის მუდმივები მთლიანი ორბიტის (ორიენტაცია სივრცეში, ექსცენტრისიტეტი და ა.შ.) ამსახველი \mathbf{p} -ის და \mathbf{r} -ის ალგებრული ფუნქციებია და არც ერთი ამ შვიდი მუდმივი სიდიდიდან სანყის დროს ნივთიერი ნერტილის ორბიტაზე მდებარეობას არ ასახავს. მოძრაობის ერთ-ერთი მუდმივას ამგვარ ინფორმაციასთან კავშირი უნდა ჰქონდეს, მაგალითად პერიჰელიონის გავლის T დროის სახით, ამიტომ ორბიტის ზომის, ფორმის და ორიენტაციის ამსახველი მოძრაობის მხოლოდ ხუთი დამოუკიდებელი მუდმივა შეიძლება არსებობდეს. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ \mathbf{L} -ის, \mathbf{A} -ს და E შემადგენელი სიდიდეებიდან ყველა დამოუკიდებელი არ არის და სინამდვილეში მათ შორის მხოლოდ ორი დამოკიდებულება უნდა არსებობდეს. ერთი ასეთი დამოკიდებულება უკვე მივიღეთ \mathbf{A} -ს და \mathbf{L} -ის ორთოგონალობის სახით, ხოლო მეორე მათგანი 3.86 ფორმულიდან გამომდინარეობს, როდესაც ექსცენტრისიტეტი 3.57 ფორმულიდან E -ს და l -ის საშუალებით გამოისახება:

$$A^2 = m^2 k^2 + 2mEl^2, \quad (3.87)$$

რაც ადასტურებს, რომ შვიდიდან დამოუკიდებელი მხოლოდ ხუთი მუდმივაა.

იმპულსის მომენტის ვექტორი და ენერგია მოძრაობის მხოლოდ ოთხ დამოუკიდებელ მუდმივას შეიცავენ, ხოლო ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორი კიდევ ერთია. ჩნდება შეკითხვა: რატომ არ უნდა არსებობდეს ნებისმიერი ცენტრალური ძალის ზოგადი კანონისთვის რაიმე მუდმივი სიდიდე, რომელიც \mathbf{L} -თან და E -სთან ერთად ორბიტას კეპლერის ამოცანის განსაკუთრებული შემთხვევის ლაპლას-რუნგე-ლენცის ვექტორის მსგავსად განსაზღვრავს? პასუხი ის არის, რომ ამგვარი მუდმივი სიდიდეების მიღება შესაძლებელია, მაგრამ ისინი მოძრაობის საკმაოდ უცნაური ფუნქციები არიან. ორბიტასთან დაკავშირებული მოძრაობის მუდმივები ორბიტას განსაზღვრავენ ანუ მათ ორბიტის განტოლებამდე მივყავართ, სადაც r მოცემულია θ -ის ფუნქციის სახით. ზოგადად, ცენტრალური ძალით გამოწვეული მოძრაობის ორბიტები არ არიან ჩაკეტილნი და 3.6 პარაგრაფიდან

გამომდინარე, ჩაკეტილი ორბიტები ძალის კანონის სახით ჩამოყალიბებულ, საკმაოდ მკაცრ პირობებს საჭიროებენ. ღია ორბიტების თვისებაა, რომ გრაფიკი r -ის შემობრუნების წერტილებს შორის მდებარე ნებისმიერ შემთხვევით (r, θ) წერტილზე გაივლის. როდესაც θ სრულ ციკლს გადის, ნივთიერი წერტილი ნებისმიერ წინა ორბიტით გავლილ ტრაექტორიას აღარ იმეორებს. მაშასადამე, ორბიტის განტოლება ისეთია, რომ r არის θ -ის მრავალი მნიშვნელობის მქონე ფუნქცია, ფაქტიურად θ -ის უსასრულოდ მრავალი მნიშვნელობის მქონე ფუნქცია. ორბიტის განმსაზღვრელი L -ის და E -ს შესაბამისი დამატებითი მუდმივი სიდიდე ნივთიერი წერტილის მოძრაობის უსასრულოდ მრავალი მნიშვნელობის მქონე ფუნქციასაც უნდა მოიცავდეს. დავუშვათ, r ცვლადი პერიოდულია და მისი კუთხური სიხშირეა ω_r , ხოლო θ კუთხური კოორდინატი ასევე პერიოდულია და მისი კუთხური სიხშირეა ω_θ . თუ სიხშირეების შეფარდება მთელი რიცხვი ან წილადია, მაშინ პერიოდებს თანაშემომილები ეწოდებათ. თანაშემომილი ორბიტები ჩაკეტილებია და ორბიტაზე მოძრავი მასა ტრაექტორიას მუდმივად იმეორებს. როდესაც $\omega_\theta > \omega_r$, ორბიტა ათვლის სათავის გარშემო სპირალურად ვრცელდება როდესაც მანძილი აპსიდალურ მნიშვნელობებს შორის იცვლება. ორბიტა მხოლოდ მაშინ არის ჩაკეტილი, როდესაც სიხშირეები თანაშემომილებია. თუ კეპლერის ამოცანის მსგავსად $\omega_r = \omega_\theta$, მაშინ პერიოდებს გადაგვარებულები ეწოდებათ. თუ ორბიტები გადაგვარებულებია, მაშინ დამატებითი მუდმივი სიდიდე არსებობს, რომელიც რუნგე-ლენცის ვექტორის მსგავსად r -ის ან p -ის ალგებრული ფუნქციაა.

მოყვანილი არგუმენტებიდან გამომდინარე, ჰუკის კანონის ძალის შემთხვევაშიც უნდა არსებობდეს ანალოგიური ვექტორი, როდესაც ორბიტები აგრეთვე გადაგვარებულებია. მაშასადამე, E -სთან და L -თან ერთად მოძრაობის დამატებითი მუდმივას ან ინტეგრალის არსებობა, რომელიც მოძრაობის მარტივი ალგებრული ფუნქციაა, ნიშნავს, რომ მოძრაობა გადაგვარებულია და შემოსაზღვრული ორბიტები ჩაკეტილებია.

3.10 გაბნევა ცენტრალური ძალის ველში

ცენტრალური ძალებისადმი დაინტერესება პლანეტების მოძრაობასთან დაკავშირებული ასტრონომიულმა პრობლემებმა გამოიწვიეს. არ არსებობს მიზეზი, რის გამოც ცენტრალური ძალით გამოწვეული მოძრაობა მხოლოდ ასტრონომიის თვალთახედვიდან უნდა განვიხილოთ. მაგალითად, ბორის ატომებში ორბიტაზე მოძრაობაც ცენტრალური ძალით არის გამოწვეული. კლასიკური მექანიკა ცენტრალური ძალის ველის მიერ ნაწილაკების გაბნევას შეისწავლის. თუ ნაწილაკები ატომური ზომებისაა, მაშინ კლასიკურ მექანიკაში ჩატარებული გამოთვლები ზუსტნი არ იქნებიან, ვინაიდან ამ შემთხვევაში კვანტური ეფექტები მეტისმეტად ძლიერებია. მიუხედავად ზემოთქმულისა, კლასიკური

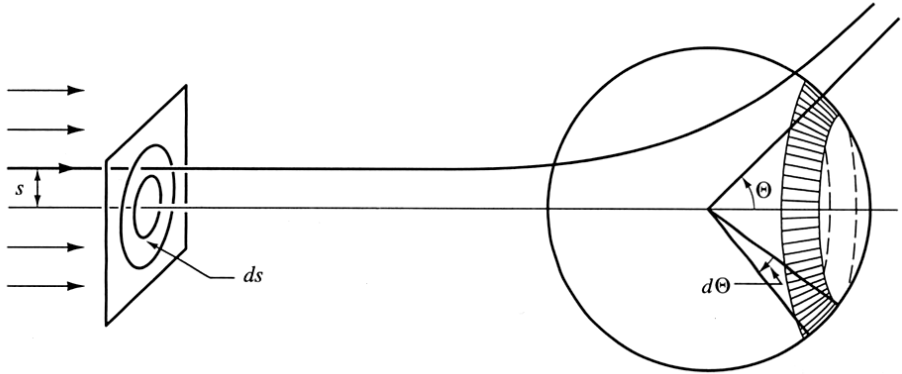
მექანიკით ნაწინასწარმეტყველები თეორიები მაინც ახლოს არიან სინამდვილესთან. გარდა ამისა, გაბნევის მოვლენის აღწერის მეთოდები, როგორც კლასიკურ მექანიკაში, ასევე კვანტურში ერთი და იგივენი არიან.

ერთ სხეულზე დაყვანის შემთხვევაში, გაბნევის ამოცანა **ცენტრალური ძალის** მიერ ნაწილაკების გაბნევის უკავშირდება. ჩვენ ერთნაირი მასის ნაწილაკების (ელექტრონების, ალფა-ნაწილაკების თუ პლანეტების) ერთგვაროვან კონას განვიხილავთ, როდესაც ენერჯია ძალის ცენტრზე ეცემა. ვუშვებთ, რომ დიდ მანძილებზე ძალა ნულის ტოლი ხდება. დაცემული კონა **I ინტენსივობით** (მას აგრეთვე ნაკადის სიმკვრივე ეწოდება) ხასიათდება. ინტენსივობა დროის ერთეულში კონის პერპენდიკულარული ფართობის ერთეულის მკვეთი ნაწილაკების რიცხვია. როდესაც ნაწილაკი ძალის ცენტრს უახლოვდება, ის მიიზიდება ან განიზიდება, ხოლო მისი ორბიტა საწყისი წრფივი ტრაექტორიიდან გადაიხრება. ძალის ცენტრის გავლის შემდეგ, ნაწილაკზე მოქმედი ძალა მცირდება და ნაწილაკის ორბიტა კვლავ წრფე ხდება. მოძრაობის საბოლოო მიმართულება საწყის მიმართულებას არ ემთხვევა და ნაწილაკს გაბნეული ეწოდება. **მოცემული მიმართულების გაბნევის $\sigma(\Omega)$, განივი კვეთია:**

$\sigma(\Omega)d\Omega$ = დროის ერთეულში $d\Omega$ სივრცითი კუთხით გაბნეული ნაწილაკების რაოდენობა/საწყისი (დაცემული) ინტენსივობა (3.88) სადაც $d\Omega$ არის სივრცითი კუთხის ელემენტი Ω -ის მიმართულებით. ხშირად $\sigma(\Omega)$ -ს **გაბნევის დიფერენციალურ განივ კვეთსაც** უწოდებენ. ცენტრალური ძალების მოქმედების შემთხვევაში, დაცემული კონის ღერძის გარშემო სრული სიმეტრია უნდა არსებობდეს ანუ სივრცითი კუთხის ელემენტი ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$d\Omega = 2\pi \sin \Theta d\Theta, \tag{3.89}$$

სადაც Θ არის კუთხე დაცემის და გაბნევის მიმართულებას შორის და მას **გაბნევის კუთხე** ეწოდება (იხ. სურ. 3.19, რომელზეც განზომიდი გაბნევაა გამოსახული). სახელი „განივი კვეთი“ იქიდან მომდინარეობს, რომ $\sigma(\Omega)$ -ს ფართობის განზომილება აქვს.



სურ. 3.19. ძალთა ცენტრი ნაწილაკების დაცემულ კონას განაბნევს

ორბიტის მუდმივებს და მაშასადამე გაბნევის ოდენობას ნებისმიერი მოცემული ნაწილაკისთვის ენერგია და იმპულსის მომენტი განსაზღვრავს. ძალიან მოსახერხებელია იმპულსის მომენტის გამოსახვა ენერგიის და s შეჯახების პარამეტრის სახელით ცნობილი სიდიდის საშუალებით. შეჯახების პარამეტრი ძალის ცენტრსა და დაცემის სიჩქარეს შორის პერპენდიკულარული მანძილია. თუ ნაწილაკის დაცემის სიჩქარეა v_0 :

$$l = mv_0 s = s \sqrt{2mE}. \quad (3.90)$$

თუ E და s ფიქსირებულია, მაშინ Θ გაბნევის კუთხე ცალსახად განისაზღვრება.* ამავე დროს ვუშვებთ, რომ s -ის სხვადასხვა მნიშვნელობები ერთი და იგივე გაბნევის კუთხეს არ იძლევიან. აქედან გამომდინარე, Θ -სა და $\Theta + d\Theta$ -ს შორის მდებარე $d\Omega$ სივრცითი კუთხით გაბნეული ნაწილაკების რაოდენობა შესაბამის s -სა და $s + ds$ -ს შორის მდებარე შეჯახების პარამეტრის მქონე დაცემული ნაწილაკების რაოდენობის ტოლი უნდა იყოს:

$$2\pi I s | ds | = 2\pi \sigma(\Theta) I \sin \Theta | d\Theta |. \quad (3.91)$$

3.91 ფორმულაში აბსოლუტური მნიშვნელობის ნიშნები იმიტომ შემოვიტანეთ, რომ ნაწილაკების რაოდენობა ყოველთვის დადებითი უნდა იყოს, მართალია s და Θ ხშირად საპირისპირო მიმართულებებით იცვლებიან. თუ s ენერგიის ფუნქციაა და შესაბამისი გაბნევის კუთხეა:

$$s = s(\Theta, E), \quad (3.92)$$

მაშინ დიფერენციალურ განივ კვეთსა და Θ -ს შორის ასეთი დამოკიდებულებაა:

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin \Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|. \quad (3.93)$$

Θ გაბნევის კუთხის s -ის ფუნქციის სახით მიღება ორბიტის 3.36 განტოლებიდან შეიძლება. სიმარტივისთვის კვლავ სრულად განმზიდ გაბნევას განვიხილავთ (იხ. სურ. 3.20). ორბიტა პერიაფსის მიმართულების გარშემო სიმეტრიული უნდა იყოს და ამიტომ გაბნევის კუთხეა:

$$\Theta = \pi - 2\Psi, \quad (3.94)$$

სადაც Ψ არის კუთხე შემომავალ ასიმპტოტასა და პერიაფსისის შორის. Ψ -ის მიღება 3.36 ფორმულიდანაც შეიძლება, თუ ჩავსვამთ $r_0 = \infty$, როდესაც $\theta_0 = \pi$ და $\theta = \pi - \Psi$, როდესაც $r = r_m$ (მიახლოების მინიმალური მანძილი). ტრივიალური გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:

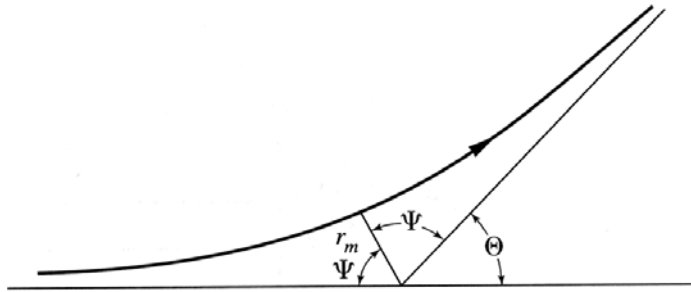
$$\Psi = \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}}. \quad (3.95)$$

l გამოვსახოთ s შეჯახების პარამეტრის საშუალებით (3.90 ფორმულა) და $\Theta(s)$ -ს გამოსახულება იქნება:

$$\Theta(s) = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{s dr}{r \sqrt{r^2 \left(1 - \frac{V(r)}{E}\right) - s^2}}, \quad (3.96)$$

თუ r -ს $1/u$ -ით შევცვლით:

$$\Theta(s) = \pi - 2 \int_0^{u_m} \frac{s du}{\sqrt{1 - \frac{V(u)}{E} - s^2 u^2}}. \quad (3.97)$$



სურ. 3.20. ორბიტის პარამეტრების და გაბნევის კუთხეს შორის დამოკიდებულება განზმიდი გაბნევის დროს

3.96 და 3.97 ფორმულები იშვიათად გამოიყენებიან გარდა იმ შემთხვევისა, როდესაც გაბნევის კუთხის რიცხვითი გამოთვლა ხდება. თუ ორბიტების ანალიზური გამოსახულება არსებობს, Θ -სა და s -ს შორის დამოკიდებულების გამოთვლა უბრალო დაკვირვების შედეგადაც შეიძლება. ამგვარი მეთოდის ისტორიულად მნიშვნელოვანი მაგალითია დამუხტული ნაწილაკების განზმიდი გაბნევა კულონის ველის მიერ. გამბნევი ძალის ველს $-Ze$ მუხტის დაცემულ ნაწილაკებზე მოქმედი $-Ze$ ფიქსირებული მუხტი წარმოქმნის და ძალა ასე შეიძლება ჩაინეროს:

$$f = \frac{ZZe^2}{r^2},$$

ანუ განზმიდი შებრუნებული კვადრატების კანონი მივიღეთ. აქ შეგვიძლია 3.7 პარაგრაფში მიღებული შედეგის გამოყენება, თუ ძალის მუდმივას ასე ჩავწერთ:

$$k = -ZZe^{-2}. \quad (3.98)$$

ენერგია ნულზე მეტია და ორბიტა ჰიპერბოლაა, რომლის ექსცენტრისიტეტია⁸:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m(ZZe^{-2})^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Es}{ZZe^{-2}}\right)^2}, \quad (3.99)$$

თუ 3.55 ფორმულაში θ' არის π , პერიაფსისი შესაბამება $\theta = 0$ -ს და ორბიტის განტოლება იქნება:

$$\frac{1}{r} = \frac{mZZe^{-2}}{l^2}(\epsilon \cos \theta - 1). \quad (3.100)$$

ჰიპერბოლური ორბიტის მიღებულ განტოლებას ელიფსური ორბიტის განტოლების ფორმა აქვს, ოღონდ ნიშანია შეცვლილი. შემომავალი ასიმპტოტის Ψ მიმართულებას $r \rightarrow \infty$ პირობა განსაზღვრავს:

$$\cos \Psi = \frac{1}{\epsilon}$$

ან 3.94 ფორმულიდან გამომდინარე: $\sin \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}$.

მაშასადამე: $\cot^2 \frac{\Theta}{2} = \epsilon^2 - 1$,

და 3.99 ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$\cot \frac{\Theta}{2} = \frac{2Es}{ZZe^{-2}}.$$

შეჯახების პარამეტრსა და გაბნევის კუთხეს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულებაა:

$$s = \frac{ZZe^{-2}}{2E} \cot \frac{\Theta}{2}. \quad (3.101)$$

3.93 ფორმულით მოთხოვნილი გარდაქმნების შემდეგ $\sigma(\Theta)$ იქნება:

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{ZZe^{-2}}{2E}\right)^2 \csc^4 \frac{\Theta}{2}. \quad (3.102)$$

3.102 ფორმულა რეზერფორდის გაბნევის განივ კვეთს გვაძლევს, რომელიც რეზერფორდმა ატომის ბირთვის მიერ ალფა-ნაწილაკების გაბნევისთვის მიიღო. კვანტური მექანიკა არარელატივისტურ ზღვარში იდენტურ განივ კვეთს გვაძლევს. ატომურ ფიზიკაში σ_T გაბნევის სრული განივი კვეთი ასე განისაზღვრება:

⁸ ϵ ელექტრონის მუხტისგან გასარჩევად ექსცენტრისიტეტს დროებით ϵ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ

$$\sigma_T = \int_{4\pi} \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\Theta) \sin \Theta d\Theta.$$

თუ ჯამური განივი კვეთის გამოთვლას კულონის ძალისთვის შევეცდებით ანუ 3.102 ფორმულას ამ განსაზღვრებაში ჩავსვათ, შედეგი უსასრულობა იქნება. ამის მიზეზი ძნელი გამოსაცნობი არ არის. განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ჯამური განივი კვეთი დროის ერთეულში ყველა მიმართულებით გაბნეული ნაწილაკების რაოდენობაა დაცემული ინტენსივობის ერთეულისთვის. კულონის ველს „შორეული მოქმედების“ ძალა წარმოქმნის და მისი მოქმედება უსასრულობაში გრძელდება. მცირეოდენი გადახრები მხოლოდ ძალიან დიდი შეჯახების პარამეტრის მქონე ნაწილაკებისთვის ხდება. მაშასადამე, დაცემული კონის ყველა ნაწილაკი გარკვეულწილად განიბნევა და ისინი გაბნევის სრულ განივ კვეთში შედიან. აქედან გამომდინარე ცხადია, რომ σ_T -ს უსასრულო მნიშვნელობა კულონის ველისთვის მოსალოდნელია. კლასიკურ მექანიკაში იგივე მაშინ ხდება, როდესაც გამბნევი ველი ყველა მანძილზე ნულისგან განსხვავდება, თანაც ამ განსხვავების სიდიდეს მნიშვნელობა არ აქვს.⁹ თუ ძალის ველი „წყდება“ ანუ გარკვეული მანძილის შემდეგ ნულის ტოლია, მაშინ გაბნევის განივი კვეთი სასრული იქნება. ამგვარი წყვეტა ბირთვის კულონის ველისთვის ატომური ელექტრონების არსებობის შემთხვევაში ხდება, რომლებიც ბირთვის დაეკრანებს ახდენენ და მის მუხტს ატომის გარეთ ფაქტიურად აბათილებენ.

რეზერვორდის გაბნევის დროს, Θ გაბნევის კუთხე ν შეჯახების პარამეტრის გლუვი მონოტონური ფუნქციაა. 3.101 ფორმულიდან გამომდინარე, როდესაც ν უსასრულობიდან მცირდება, Θ ნულიდან მონოტონურად იზრდება და ν -ის განულებსას π მნიშვნელობას იძენს. კლასიკურ სისტემებში ზოგჯერ ყველაფერი ასე არ ხდება და კლასიკური განივი კვეთისთვის მიღებული 3.93 ფორმულა ცვლილებას საჭიროებს. მაგალითად, თუ პოტენციალი განმზივია და ნაწილაკის ენერგია 3.21ა სურათზე გამოსახული ბუნებისაა, Θ -ს ν -ზე დამოკიდებულების ფუნქციის გრაფიკი 3.21ბ სურათზე ნაჩვენებების მსგავსია. მაშასადამე, შეჯახების პარამეტრის დიდი მნიშვნელობების დროს, ნაწილაკი ძალის ცენტრიდან დიდ რადიალურ მანძილზე რჩება და მხოლოდ მცირედით გადაიხრება. როდესაც $\nu = 0$, ნაწილაკი ძალის ცენტრისკენ წრფის გასწვრივ მოძრაობს, ხოლო თუ ენერგია პოტენციალის მაქსიმუმზე მეტია, მაშინ ნაწილაკი ძალის ცენტრზე გაივლის და საერთოდ არ განიბნევა. მაშასადამე, ν -ის ორივე ზღვრისთვის გაბნევის კუთხე ნულის ტოლია. ν -ის გარკვეული შუალედური მნიშვნელობის შემთხვევაში გაბნევის კუთხე Θ_m მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს. როდესაც $\Theta < \Theta_m$, ν -ის ორი მნიშვნელობა არსებობს, რომლე-

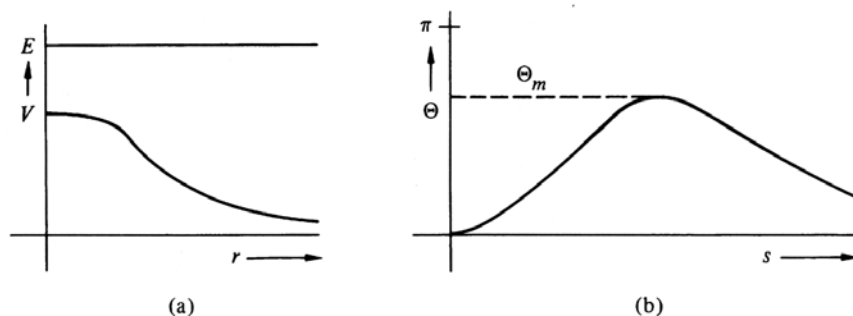
9 [□] σ_T კულონის ველისთვის კვანტურ მექანიკაში უსასრულოა, ვინაიდან როგორც უკვე ვთქვით, 3.102 ფორმულა კვანტურ მექანიკაშიც ვარგისია. მიუხედავად ამისა, კვანტურ მექანიკაში „შორეული მოქმედების“ ყველა ძალა არ გვაძლევს უსასრულო ჯამურ განივ კვეთებს. ყველა პოტენციალი, რომელიც დიდ მანძილებზე $1/r^2$ -ზე სწრაფად მცირდება, სასრულო ჯამურ განივ კვეთებს წარმოქმნის.

ბიცი ერთი და იგივე გაბნევის კუთხეს გვაძლევენ. თითოეული მათგანი ამ კუთხით გაბნევის განივ კვეთში თავის წვლილს შეიტანს და 3.93 ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\sigma(\Theta) = \sum_i \frac{s_i}{\sin \Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|, \quad (3.103)$$

სადაც i ინდექსი 1 ან 2 მნიშვნელობას იძენს, როდესაც $\Theta \neq \Theta_m$. აქ i ინდექსი სხვადასხვა s განასხვავებს, რომლებიც ერთნაირ Θ იძლევიან.

განსაკუთრებულ ინტერესს მაქსიმალური Θ_m გაბნევის კუთხის პირობებში არსებული განივი კვეთი იწვევს. ამ კუთხეზე Θ -ის წარმოებული s -ით ბათილდება და 3.93 ან 3.102 ფორმულიდან გამომდინარე, $\Theta \rightarrow \Theta_m$ პირობებში განივი კვეთი უსასრულო ხდება. დიდი კუთხეებისთვის განივი კვეთი ნულის ტოლია, ვინაიდან გაბნევის კუთხემ Θ_m -ს არ შეიძლება გადააჭარბოს. განივი კვეთის უსასრულოდ ზრდა და შემდეგ სწრაფად გაქრობა გეომეტრიულ ოპტიკაში წვიმის წვეთების მიერ მზის სხივების გაბნევას ძალიან ნააგავს. მსგავსების საფუძველზე ამ მოვლენას **ცისარტყელისებრი გაბნევა** ეწოდება.

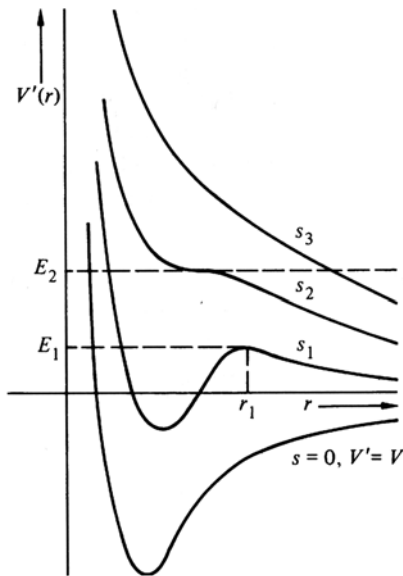


სურ. 3.21. განმზიდი, არასინგულარული გამბნევი პოტენციალი და Θ გაბნევის კუთხის s -ი შეჯახების პარამეტრზე დამოკიდებულების ფუნქციის ორსახა გრაფიკი საკმარისად მაღალი ენერგიის პირობებში

აქამდე განხილული მაგალითები მხოლოდ სრულად განმზიდ გაბნევას შეეხებოდა. თუ გაბნევაში მიმზიდველი ძალებიც მონაწილეობენ, მაშინ გართულებებს აქვს ადგილი. მიზიდვის შედეგად ნაწილაკი 3.20 სურათზე გამოსახული განმზიდი გადახრის ნაცვლად ცენტრისკენ ნაიბიძგება. შემომავალ მიმართულებასა და პერიაფსისის მიმართულებას შორის Ψ კუთხე $\pi/2$ -ზე მეტი შეიძლება აღმოჩნდეს და 3.94 ფორმულით მოცემული გაბნევის კუთხე უარყოფითი იქნება. ასეთი შედეგი თავისთავად პრობლემა არ არის, ვინაიდან განივი კვეთის გამოთვლისას Θ -ის მოდული გამოიყენება, მაგრამ 3.96 ფორმულით გამოთვლილი Θ შესაძლოა 2π -ზე მეტიც აღმოჩნდეს. ეს ნიშნავს, რომ გაბნეული

ნაწილაკი ძალის ცენტრის გარშემო წრეზე შეიძლება ერთხელ ან მეტჯერ დატრიალდეს, ვიდრე გაბნევის მიმართულებით დაიწყებს მოძრაობს.

განვიხილოთ გამბნევი პოტენციალი, რომელიც 3.22 სურათზე $s = 0$ გრაფიკის სახითაა გამოსახული. შიდამოლეკულურ პოტენციალებთან დაკავშირებულ ამოცანებში ხშირად ვუშვებთ, რომ მიმზიდველი პოტენციალი დიდი მანძილებზე $1/r^2$ -ზე უფრო სწრაფად მცირდება, ხოლო მცირე მანძილებზე განმზიდი პოტენციალი ასევე ძალიან სწრაფად იზრდება. 3.22 სურათის დანარჩენი გრაფიკები $V'(r)$ ეფექტურ ერთგანზომილებიან პოტენციალს s შეჯახების პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის ასახავენ. ვინაიდან განმზიდი ცენტრიდანული დაბრკოლება $s > 0$ ყველა მნიშვნელობებისთვის დიდი r -ის დროს დომინირებს, მცირე s -ის შესაბამის ექვივალენტურ პოტენციალს ამოზნექილობა (კუზი) ექნება.



სურ. 3.22. კომბინირებული მიმზიდველი და განმზიდველი გამბნევი პოტენციალი და შესაბამისი ექვივალენტური ერთგანზომილებიანი პოტენციალი s შეჯახების პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობების დროს

ახლა მოდით s_1 შეჯახების პარამეტრის და ამოზნექილობის მაქსიმუმის შესაბამისი E_1 ენერჯიის მქონე შემომავალი ნაწილაკი განვიხილოთ. 3.3 პარაგრაფიდან გავიხსენოთ, რომ E_1 -ს და $V'(r)$ -ს შორის სხვაობა ამ მანძილზე რადიალური სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია. როდესაც შემომავალი ნაწილაკი V' -ის მაქსიმუმის ადგილს ანუ r_1 -ს მიაღწევს, რადიალური სიჩქარე ნულის ტოლია. 3.6 პარაგრაფიდან გავიხსენოთ, რომ ჩვენ ამ r_1 მანძილზე არასტაბილური წრიული ორბიტის პირობები გვაქვს. თუ არავითარი შემფოთება არ არსებობს, მაშინ E_1 და s_1 პარამეტრების მქონე შემომავალი ნაწილაკი r მანძილის მიღწევის შერმდეგ ძალის ცენტრის გარშემო უსასრულო წრიულ მოძრაობას დაი-

წყებს და არასდროს შეწყვეტს! როდესაც შეჯახების პარამეტრი იგივეა, ხოლო E ოდნავ მეტია E_1 -ზე, წრიული ორბიტა არ შეიქმნება. მიუხედავად ამისა, როდესაც ნაწილაკი r_1 სიახლოვეზეა, რადიალური სიჩქარე ძალიან მცირე იქნება და ნაწილაკი ამოზნექილობის სიახლოვეს დისპროპორციულად დიდ დროს გაატარებს. $\dot{\theta}$ კუთხური სიჩქარე r მანძილზე ქვემოთ მოყვანილი ფორმულით გამოითვლება და მაქსიმუმის არსებობა მასზე ზეგავლენას არ ახდენს:

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr_1^2} = \frac{s_1}{r_1^2} \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

მაშასადამე, ამოზნექილობის არეში გავლისთვის საჭირო დროის განმავლობაში, კუთხურმა სიჩქარემ ნაწილაკი 2π -ზე დიდ კუთხეებზე შეიძლება ამოძრავოს. ამ შემთხვევაში კლასიკურ გაბნევას **ორბიტული** ან **სპირალური** ეწოდება.

როდესაც შეჯახების პარამეტრი იზრდება, ჩაღრმავება და ამოზნექილობა ექვივალენტურ V' პოტენციალში ბრტყელდებიან, ვიდრე რაიმე s_2 პარამეტრის და E_2 ენერჯიის პირობებში V' -ს გადაღუნვის მხოლოდ ერთი წერტილი დარჩება (სურ. 3.22). თუ ნაწილაკის ენერჯია E_2 -ზე მეტია, ორბიტაზე მოძრაობა წყდება. ეფექტური პოტენციალის მიმზიდველი და განმზიდი კომპონენტების გაერთიანებულ მოქმედებას ამ შემთხვევაშიც შეუძლია ნულოვანი გადახრის გამოწვევა შეჯახების პარამეტრის რაიმე სასრული მნიშვნელობის შემთხვევაში. დიდი ენერჯიების და შეჯახების მცირე პარამეტრების დროს, გაბნევას ძირითადად მცირე მანძილებზე არსებული ძლიერი განმზიდი პოტენციალები იწვევენ და გაბნევა რეზერფორდის გაბნევის მსგავსად ხდება.

გაბნეული ნაწილაკი π -ზე მეტად შეიძლება გადაიხაროს, როდესაც ორბიტაზე მოძრაობას აქვს ადგილი. მეორეს მხრივ, ლაბორატორიაში გაბნევის კუთხე 0-სა და π -ს შორის მერყეობს. ასეთ შემთხვევებში განასხვავებენ Φ **გადახრის კუთხეს**, რომელიც 3.96 ან 3.97 ფორმულის მარჯვენა მხარესაა მოცემული, და Θ დაკვირვებად გაბნევის კუთხეს. მოცემული Φ -ისთვის Θ კუთხე ასე გამოითვლება:

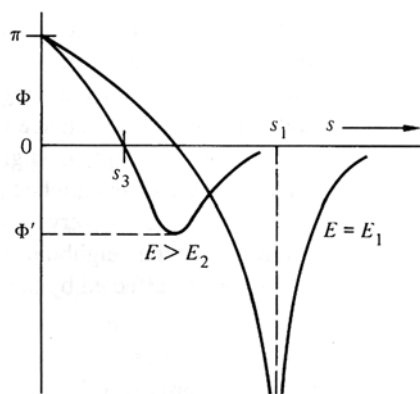
$$\Theta = \pm\Phi - 2m\pi,$$

m -ის ნიშანი და მნიშვნელობა ისე უნდა ავირჩიოთ, რომ Θ კუთხე 0-სა და π -ს შორის აღმოჩნდეს. 3.103 ფორმულაში შემავალი ჯამი Φ -ს ყველა მნიშვნელობას მოიცავს, რომელიც ერთნაირ Θ კუთხეს გვაძლევს. 3.23 სურათზე გამოსახულია 3.22 სურათზე ნაჩვენები პოტენციალის და ორი სხვადასხვა ენერჯიის პირობებში Θ კუთხის s -ზე დამოკიდებულების ფუნქციის გრაფიკები. ორბიტაზე მოძრაობა, რომელიც $E = E_1$ შემთხვევაში ხდება, $s = s_1$ წერტილში გრაფიკის სინგულარობით გამოიხატება. როდესაც $E = E_2$, ორბიტაზე მოძრაობა აღარ ხდება, მაგრამ, როდესაც $\Theta = -\Phi'$, ცისარტყელას

ეფექტს აქვს ადგილი. ყურადღება მიაქციეთ, რომ როდესაც $s = s_3$, Θ კუთხე ნულის ტოლი ხდება. 3.93 ფორმულიდან გამომდინარე, Θ -ს განულებასთან ერთად განივი კვეთი წინა მიმართულებით უსასრულო ხდება. განივი კვეთი უკანა მიმართულებითაც შეიძლება გახდეს უსასრულო, თუ ქვემოთ მოცემული სიდიდე $\Theta = \pi$ დროს სასრულია:

$$s \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|.$$

გაბნევის კუთხის წინა ან უკანა მიმართულებით მიღებული უსასრულობების შემთხვევაში ადგილი აქვს **მანათობელ გაბნევას** და კვლავ მეტეოროლოგიურ ოპტიკაში არსებული ანალოგიური მოვლენა გვახსენდება¹⁰.



სურ. 3.23. Φ გადახრის კუთხის s -ზე დამოკიდებულების ფუნქციის გრაფიკები 3.22 სურათზე გამოსახული პოტენციალისთვის ორი სხვადასხვა ენერგიის შემთხვევაში

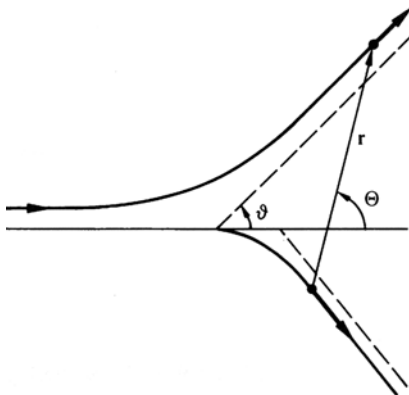
უფრო ზოგადი შედეგების მიღებისთვის კვანტური შესწორებებია საჭირო, თუმცა ზოგიერთ შემთხვევაში კვანტური ეფექტი ძალიან მცირეა. ასე ხდება მაგალითად დაბალი ენერგიის მქონე იონების კრისტალის მესერზე გაბნევის დროს და ამგვარ პირობებში კლასიკური გამოთვლები სრულიად საკმარისია. როდესაც კვანტური შესწორება მაინც აუცილებელია, მაშინაც კი ხშირად საკმარისია მიახლოებითი მეთოდის („ნახევრადკლასიკური“ მიდგომის) გამოყენება. ამ მეთოდის რეალიზებისთვის კლასიკური ტრაექტორიის ცოდნაა საჭირო. თითქმის ყველა პრაქტიკულად საჭირო პოტენციალისთვის ორბიტის ანალიზური ფორმის დადგენა შეუძლებელია და 3.96 ფორმულა s -ის გარკვეული არეებისთვის მიახლოებითი გამოსახულებით იცვლება ან რიცხობრივად ინტეგრირდება.

3.11 გაბნევის ამოცანის გადაყვანა ლაბორატორიულ კოორდინატებში

წინა პარაგრაფში ჩვენ მხოლოდ ერთი სხეულის ამოცანა განვიხილეთ, როდესაც

¹⁰ უკანა ნათება კარგად ცნობილია თვითმფრინავის მგზავრებისთვის, რომლებიც თვითმფრინავიდან ღრუბლებზე დაცემული ჩრდილის გარშემო მანათობელ რგოლს ხედავენ

ნანილაკი ფიქსირებული ძალის ცენტრის მიერ განიზნეოდა. გაბნევის დროს პრაქტიკულად ყოველთვის ორი სხეული გვაქვს, მაგალითად რეზერფორდის გაბნევის შემთხვევაში ალფა-ნანილაკი და ატომის ბირთვი გვხვდებიან. m_2 მასის მქონე მეორე ნანილაკი უძრავი კი არ არის, არამედ გაბნევის შედეგად სანყისი მდებარეობიდან აისხლიტება. ვინაიდან ნებისმიერი ორი სხეულის ცენტრალური ძალის ამოცანის დაყვანა ერთი სხეულის ექვივალენტურ ამოცანაზე შეიძლება, შესაძლოა ვიფიქროთ, რომ მხოლოდ m -ის შეცვლაა საჭირო დაყვანილი μ მასით. სინამდვილეში, ყველაფერი ასე მარტივად არ არის. ლაბორატორიაში გაზომილ გაბნევის კუთხეს ϑ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ და ეს არის გაბნეული ნანილაკის სანყის და საბოლოო მიმართულებებს შორის კუთხე ლაბორატორიულ კოორდინატებში¹¹. მეორეს მხრივ, ექვივალენტურ, ერთი სხეულის ამოცანაში გამოთვლილი Θ კუთხე ორ ნანილაკს შორის ფარდობითი ვექტორის სანყის და საბოლოო მიმართულებებს შორის კუთხეა მასათა ცენტრის კოორდინატებში. Θ და ϑ კუთხეები მხოლოდ მაშინ არიან ერთმანეთის ტოლები, როდესაც გაბნევის პროცესში მეორე ნანილაკი უძრავია. მეორე ნანილაკი თავდაპირველად მართლაც უძრავია, მაგრამ შემდეგ ორ ნანილაკს შორის მოქმედი ძალის შედეგად მოძრაობას იწყებს და როგორც 3.24 სურათზეა ნაჩვენები, ეს კუთხეები ერთმანეთისგან განსხვავდებიან. მაშასადამე, ექვივალენტური, ერთი სხეულის ამოცანა ლაბორატორიის კოორდინატთა სისტემაში გაზომილ გაბნევის კუთხეს პირდაპირ არ გვაძლევს.

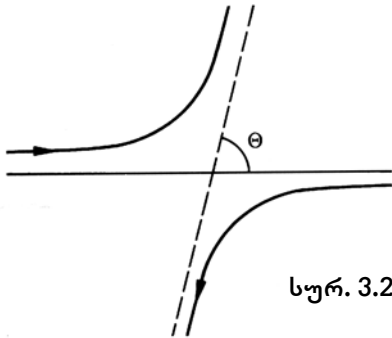


სურ. 3.24. ორი ნანილაკის გაბნევა ლაბორატორიულ სისტემაში.

Θ და ϑ გაბნევის კუთხეებს შორის დამოკიდებულება ორივე ნანილაკის მასათა ცენტრთან ერთად მოძრავ კოორდინატთა სისტემაში გაბნევაზე დაკვირვების შედეგად შეგვიძლია მივიღოთ. ამგვარ სისტემაში სრული იმპულსი ნულის ტოლია და ორივე ნანილაკს ყოველთვის თანაბარი და საწინააღმდეგო მიმართულებების იმპულსი აქვს. 3.25

11 ϑ გაბნევის კუთხე ორ ნანილაკს შორის \mathbf{r} ფარდობითი ვექტორის Θ კუთხის კოორდინატში არ უნდა აგვერიოს

სურათზე ნაჩვენებია, თუ როგორ მოჩანს გაბნევის პროცესი მასათა ცენტრის სისტემაში მყოფი დამკვირვებლის თვალთახედვით. ნაწილაკები გაბნევამდე ერთმანეთისკენ მოძრაობენ, ხოლო გაბნევის შემდეგ ერთმანეთს სცილდებიან. ფარდობითი ვექტორის სანყის და საბოლოო მიმართულებებს შორის Θ კუთხე მასათა ცენტრის სისტემაში თითოეული ნაწილაკის გაბნევის კუთხის ტოლი უნდა იყოს. Θ და ϑ გაბნევის კუთხეებს შორის დამოკიდებულება მასათა ცენტრის სისტემიდან ლაბორატორიულ სისტემაში გადასვლის შედეგად უნდა მივიღოთ.



სურ. 3.25. ორი ნაწილაკის გაბნევა მასათა ცენტრის სისტემაში.

მოდით 3.1 პარაგრაფში შემოღებული ტერმინოლოგია ოდნავი ცვლილებებით გამოვიყენოთ:

\mathbf{r}_1 და $\mathbf{v}_1 - m_1$ მასის დაცემული ნაწილაკის მდებარეობა და სიჩქარე გაბნევის შემდეგ ლაბორატორიულ სისტემაში,

\mathbf{r}'_1 და $\mathbf{v}'_1 - m_1$ მასის ნაწილაკის მდებარეობა და სიჩქარე გაბნევის შემდეგ მასათა ცენტრის სისტემაში,

\mathbf{R} და \mathbf{V} მასათა ცენტრის მდებარეობა და თანაბარი სიჩქარე ლაბორატორიულ სისტემაში.

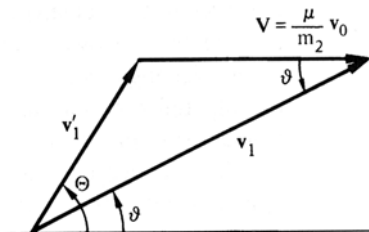
განმარტების თანახმად ნებისმიერ მომენტში:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_1,$$

და შესაბამისად:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_1 \quad (3.104)$$

3.26 სურათზე გაბნევის შემდგომ მიღებული და ზემოთ მოყვანილი ვექტორული დამოკიდებულება გრაფიკულადაა გამოსახული, როდესაც \mathbf{v}_1 და \mathbf{v}'_1 სანყისი მიმართულებით გავლებული \mathbf{V} ვექტორისადმი შესაბამისად ϑ და Θ კუთხეებს ადგენენ.



სურ. 3.26. სიჩქარეებს შორის დამოკიდებულება მასათა ცენტრის და ლაბორატორიულ კოორდინატებში

$$V = \frac{\mu}{m_2} v_0$$

სამიზნე ლაბორატორიულ სისტემაში თავდაპირველად უძრავია, ამიტომ პირველი ნაწილაკის სანყისი v_0 სიჩქარე ამ სისტემაში ნაწილაკების სანყისი ფარდობითი სიჩქარის ტოლია. სრული იმპულსის მუდმივობიდან გამომდინარე, მასათა ცენტრის თანაბარი სიჩქარეა:

$$(m_1 + m_2)V = m_1 v_0,$$

ანუ

$$V = \frac{\mu}{m_2} v_0. \quad (3.105)$$

სადაც $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. 3.26 სურათზე ჩანს, რომ:

$$v_1 \sin \vartheta = v_1' \sin \Theta$$

და

$$v_1 \cos \vartheta = v_1' \cos \Theta + V. \quad (3.106)$$

ამ ორი ფორმულის შეფარდება ϑ -სა და Θ -ს შორის დამოკიდებულებას მოგვცემს:

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \rho}, \quad (3.107)$$

სადაც ρ არის:

$$\rho \equiv \frac{\mu v_0}{m_2 v_1'}. \quad (3.108)$$

ალტერნატიულ დამოკიდებულებას მივიღებთ, თუ v_1 -ს 3.26 სურათზე გამოსახულ სამკუთხედს კოსინუსის კანონს მივუსადაგებთ და სხვა სიჩქარეების საშუალებით გამოვსახავთ:

$$v_1^2 = v_1'^2 + V^2 + 2v_1'V \cos \Theta. \quad (3.109)$$

3.109 ფორმულა 3.106 ფორმულიდან v_1 -ის გამორიცხვისთვის გამოვიყენოთ და 3.105 ფორმულის საშუალებით V გამოვსახოთ v_0 -ით:

$$\cos \vartheta = \frac{\cos \Theta + \rho}{\sqrt{1 + 2\rho \cos \Theta + \rho^2}}. \quad (3.110)$$

ორივე მიღებულ ფორმულაში შედის ρ , რომელიც სიჩქარეების შეფარდებას მოიცავს. მასათა ცენტრის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, მასათა ცენტრის სისტემაში პირველი ნაწილაკის v_1' სიჩქარესა და შეჯახების შემდგომ ფარდობით v სიჩქარეს შორის ასეთი დამოკიდებულებაა

$$v'_1 = \frac{\mu}{m_1} v, \quad \text{სადაც } v = |\dot{r}|.$$

მაშასადამე, ρ ასეც შეიძლება გამოისახოს:

$$\rho = \frac{m_1 v_0}{m_2 v}, \quad (3.108')$$

სადაც v არის ფარდობითი სიჩქარე შეჯახების შემდეგ. როდესაც შეჯახება **დრეკადია**, ორი ნაწილაკის სრული კინეტიკური ენერგია არ იცვლება და ამიტომ $v = v_0$, შესაბამისად ρ იქნება:

$$\rho = \frac{m_1}{m_2}, \quad (\text{დრეკადი შეჯახება}) \quad (3.111)$$

რაც სიჩქარეებზე ან ენერგიებზე დამოკიდებული არ არის. როდესაც შეჯახება **არადრეკადია**, ორი ნაწილაკის სრული კინეტიკური ენერგია იცვლება (კინეტიკური ენერგიის ნაწილი სამიზნის შიდა აგზნების ენერგიაში გადადის). ვინაიდან სრული ენერგია და იმპულსი მუდმივებია, შეჯახების შედეგად ენერგიის ცვლილება ასე შეიძლება გამოისახოს:

$$(3.112) \quad \frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu v_0^2}{2} + Q. \quad (3.112)$$

არადრეკადი შეჯახების ე.წ. Q სიდიდე მნიშვნელობით უარყოფითია, ხოლო ნიშნის არჩევანი ატომურ და ბირთვულ რეაქციებში მიღებულთან შესაბამისობაშია. 3.112 ფორმულიდან გამომდინარე, შეჯახებამდე და შეჯახების შემდგომი ფარდობითი სიჩქარეების შეფარდებაა:

$$\frac{v}{v_0} = \sqrt{1 + \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{Q}{E}}, \quad (3.113)$$

სადაც $E = \frac{1}{2} m_1 v_0^2$ შემომავალი ნაწილაკის ენერგიაა (ლაბორატორიულ სისტემაში). მაშასადამე, არადრეკადი გაბნევის დროს ρ არის:

$$\rho = \frac{m_1}{m_2 \sqrt{1 + \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{Q}{E}}}. \quad (\text{არადრეკადი გაბნევა}) \quad (3.114)$$

ϑ და Θ გაბნევის კუთხეები არ მხოლოდ ერთმანეთისგან განსხვავდებიან, არამედ გაბნევის დიფერენციალური განივი კვეთის მნიშვნელობა დამოკიდებულია იმაზე, თუ რომელი კუთხე გამოიყენება σ -ს არგუმენტად. ორ ფუნქციონალურ ფორმას შორის დამოკიდებულების მისაღებად ვითვალისწინებთ, რომ სივრცითი კუთხის მოცემულ ელემენტში გაბნეული ნაწილაკების რაოდენობა ϑ -ს თუ Θ -ის საშუალებით გაზომვის შემთხვევაში თანაბარი უნდა იყოს. ფორმულის სახით ეს მტკიცება ასე შეიძლება გამოისახოს:

$$2\pi I \sigma(\Theta) \sin \Theta |d\Theta| = 2\pi I \sigma'(\vartheta) \sin \vartheta |d\vartheta|,$$

ან

$$\sigma'(\vartheta) = \sigma(\Theta) \frac{\sin \Theta}{\sin \vartheta} \left| \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right| = \sigma(\Theta) \left| \frac{d(\cos \Theta)}{d(\cos \vartheta)} \right|, \quad (3.115)$$

სადაც $\sigma'(\vartheta)$ არის ლაბორატორიულ სისტემაში გაბნევის კუთხის საშუალებით გამოსახული გაბნევის დიფერენციალური განივი კვეთი. 3.110 ფორმულიდან წარმოებულ გამოითვლება და მივიღებთ:

$$\sigma'(\vartheta) = \sigma(\Theta) \frac{(1 + 2\rho \cos \Theta + \rho^2)^{3/2}}{1 + \rho \cos \Theta}. \quad (3.116)$$

$\sigma(\Theta)$ მასათა ცენტრის სისტემაში გაზომილი განივი კვეთი არ არის. $\sigma(\Theta)$ და $\sigma'(\vartheta)$ ლაბორატორიულ სისტემაში გაზომილი განივი კვეთებია და ისინი უბრალოდ სხვადასხვა კოორდინატების საშუალებით გამოისახებიან. მასათა ცენტრის სისტემაში ფიქსირებული დამკვირვებელი ლაბორატორიულ სისტემაში გაზომილისგან განსხვავებულ დაცემული ნაწილაკების ნაკადის სიმკვრივეს დაინახავს და ნაკადის სიმკვრივის ამგვარი გარდაქმნა ორ სხვადასხვა სისტემაში გაზომილი განივი კვეთების ერთმანეთთან დასაკავშირებლად უნდა გავითვალისწინოთ.

დრეკადი გაბნევის შემთხვევაში გაბნევის ორ კუთხეს შორის დამოკიდებულება საკმაოდ მარტივია, როდესაც ნაწილაკთა მასები თანაბარია. ამ შემთხვევაში $\rho = 1$ და 3.110 ფორმულიდან გვექნება:

$$\cos \vartheta = \sqrt{\frac{1 + \cos \Theta}{2}} = \cos \frac{\Theta}{2},$$

ანუ

$$\vartheta = \frac{\Theta}{2}, \quad (\rho = 1).$$

მაშასადამე, თანაბარი მასების პირობებში 90° -ზე მეტი გაბნევის კუთხეები ლაბორატორიულ სისტემაში არ გვხვდებიან და მთლიანი გაბნევა წინა ნახევარსფეროში ხდება. შესაბამისად გაბნევის განივი კვეთი Θ -ს საშუალებით ასე გამოისახება:

$$\sigma'(\vartheta) = 4 \cos \vartheta \cdot \sigma(\Theta), \quad \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (\rho = 1).$$

როდესაც Θ ცვლადით გამოსახული გაბნევა იზოტროპიულია ანუ $\sigma(\Theta)$ მუდმივია, ϑ -ის საშუალებით გამოსახული განივი კვეთი კოსინუსის მსგავსად იცვლება. როდესაც გაბნევის m_2 მასა დაცემული ნაწილაკის m_1 მასაზე ბევრად მეტია და გაბნევა დრეკადია, 3.111 ფორმულიდან გამომდინარე, $\rho = 0$ და 3.116 ფორმულიდან გამომდინარე, $\sigma'(\vartheta) \approx \sigma(\Theta)$. დრეკადი შეჯახებებისას, როდესაც სრული კინეტიკური ენერგია მუდმივია, თავდაპირველად უძრავ სამიზნესთან შეჯახება კინეტიკური ენერგიის სამიზნისთვის გადაცემას იწვევს, რაც დაცემული ნაწილაკის კინეტიკურ ენერგიას ამცირებს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, შეჯახება დაცემულ ნაწილაკს ანელებს. შენელების ხარისხი 3.109 ფორმულით გამოითვლება, თუ 3.108 და 3.105 ფორმულების საშუალებით v'_1 და V გამოისახებიან v_0 -ით:

$$\frac{v_1^2}{v_0^2} = \left(\frac{\mu}{m_2 \rho} \right)^2 (1 + 2\rho \cos \Theta + \rho^2). \quad (3.117)$$

დრეკადი შეჯახებების პირობებში $\rho = m_1/m_2$ და 3.117 ფორმულა მარტივდება:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1 + 2\rho \cos \Theta + \rho^2}{(1 + \rho)^2}, \quad (\text{დრეკადი შეჯახება}) \quad (3.117')$$

სადაც E_0 არის დაცემული ნაწილაკის საწყისი კინეტიკური ენერგია ლაბორატორიულ სისტემაში, ხოლო E_1 -ის შესაბამისი ენერგია გაბნევის შემდეგ. როდესაც ნაწილაკებს თანაბარი მასები აქვთ:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1 + \cos \Theta}{2} = \cos^2 \vartheta.$$

მაშასადამე, დაცემული ნაწილაკი გაბნევის მაქსიმალურ კუთხეზე ($\Theta = \pi$, $\vartheta = \pi/2$), მთელს ენერგიას კარგავს და ლაბორატორიულ სისტემაში ჩერდება.

გაბნევის შედეგად კინეტიკური ენერგიის გადაცემის პრინციპს სითბური ნეიტრონების რეაქტორის „შემანელებელი“ ეფუძნება. ბირთვის გახლეჩის შედეგად წარმოქმნილი სწრაფი ნეიტრონები დრეკადად მრავალჯერ განიბნევიან, ვიდრე მათი კინეტიკური ენერგიები სითბურ ენერგიებამდე შემცირდებიან. ამ დროს ნეიტრონები გახლეჩას უფრო იწვევენ, ვიდრე ჩაიჭერებიან. საუკეთესო შემანელებლები მსუბუქი ელემენტებია და ამ მიზნის მისაღწევად იდეალური წყალბადია ($\rho = 1$). ბირთვული რეაქტორის შემთხვევაში, წყალბადი მხოლოდ მაშინ არის გამოსადეგი, როდესაც ის ნაზავის ან ნაერთის, მაგალითად წყლის ნაწილია. სხვა მსუბუქი და ამავე დროს შემანელებელი ელემენტებია 2 მასის დეიტერიუმი, 12 მასის ნახშირბადი და ა.შ. პარაფინში, წყალში ან პლასტმასში შემავალი წყალბადი ნეიტრონების შენელებისთვის ლაბორატორიებში ხშირად გამოიყენება.

მიუხედავად მათი სარგებლიანობისა, ლაბორატორიულიდან მასათა ცენტრის კოორდინატებზე გადასვლა და კინეტიკური ენერგიის გადაცემასთან დაკავშირებული გამოთვლები არ არიან „თანამედროვენი“ ან „კვანტურნი“. არც გამოყენებული კლასიკური მექანიკაა განსაკუთრებით გაფართოებული და რთული. ჩვენ მხოლოდ იმპულსის ან ენერგიის მუდმივობას ვიყენებთ. იგივე ტიპის გამოთვლები შეიძლება შეგხვდეთ პირველკურსელი სტუდენტის ბლოკნოტში, სადაც ბილიარდის ბურთებს შორის დრეკადი შეჯახებებია განხილული. სწორედ ეს სიმარტივეა ზემოთ მოყვანილი გამოთვლების ფართოდ გამოყენების მიზეზი. როდესაც იმპულსი მუდმივია (კვანტური მექანიკის პირობებშიც) და მნიშვნელობა ცნობილია, გაბნევის პროცესის დეტალების ცოდნა აუცილებელი არ არის. გაბნეული ნაწილაკის სიახლოვე „შავი ყუთია“ და ჩვენ მხოლოდ ის გვაინტერესებს, რა შედის და რა გამოდის იქიდან, ხოლო ყუთში მომხდარი მოვლენა „კლასიკურია“ თუ „კვანტური“ საერთოდ არ გვაინტერესებს. მოცემულ პარაგრაფში მოყვანილი ფორმულები კვანტური მოვლენის, მაგალითად ნეიტრონ-პროტონის გაბნევის ექსპერიმენტული ანალიზისთვის გამოდგებიან, როდესაც ენერგიები საკმარისად მცირეებია და რელატივისტური ეფექტები შეგვიძლია უგულვებელვყოთ.

3.12 სამი სხეულის ამოცანა

ჩვენ აქამდე მხოლოდ ინტეგრებად ამოცანებს განვიხილავდით, რომლებშიც მოძრაობის განტოლებების ინტეგრება ამონახსნის სრულ ფორმას იძლეოდა. შებრუნებული კვადრატების კანონს დაქვემდებარებული ორი სხეულის შემთხვევაში, ამონახსნები ელიფსურ, პარაბოლურ და ჰიპერბოლურ ორბიტებზე მოძრაობას აღწერდნენ. ამონახსნების პოვნა $V(r) = ar^n$. ფორმის ხარისხოვანი კანონებისთვისაც შეიძლება. მიუხედავად ამისა, თითქმის ყველა სხვა შესაძლო ცენტრალური ძალის პოტენციალის პირობებში მოძრაობის განტოლებების ინტეგრება შეუძლებელია. როდესაც ამოცანას კიდევ ერთი მასა ემატება, მდგომარეობა ძალან რთულდება. შებრუნებული კვადრატების კანონის ძალის შემთხვევაშიც კი კეპლერის ტიპის სამი სხეულის ამოცანას ზოგადი ამონახსნი არ გააჩნია. ამ პარაგრაფში ვნახავთ თუ რა ხდება, როდესაც ამოცანას მესამე მასა ემატება.

სამი სხეულისგან შემდგარი ნიუტონისეული ამოცანა \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , და \mathbf{r}_3 მდებარეობების m_1 , m_2 , და m_3 მასებს შეიცავს, რომლებიც ერთმანეთზე გრავიტაციული ძალებით მოქმედებენ. ჩვენ ვუშვებთ, რომ \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , და \mathbf{r}_3 მდებარეობის ვექტორები მასათა ცენტრის სისტემაში გამოისახებიან. პირველი მასისთვის მოძრაობის განტოლების დანერგა ადვილია, ვინაიდან ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად, $m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1$ ორი დანარჩენი მასიდან m_1 -ზე მოქმედი გრავიტაციული ძალები ტოლია:

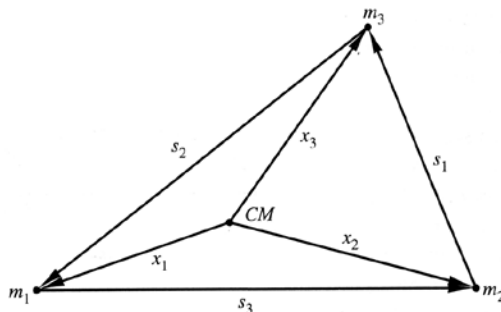
$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} \quad (3.118)$$

ანალოგიური ხდება დანარჩენი ორი მასის შემთხვევაშიც. თუ ფარდობითი მდებარეობის ვექტორებს გამოვიყენებთ:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k \quad (3.119)$$

3.27 სურათზე ჩანს, რომ:

$$\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 = 0. \quad (3.120)$$



სურ. 3.26. $\mathbf{s}_i = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k$ მდებარეობის ვექტორები სამი სხეულის ამოცანისთვის.

მცირეოდენი გარდაქმნების შემდეგ მოძრაობის განტოლებები სიმეტრიულ ფორმას იღებენ:

$$\ddot{\mathbf{s}}_i = -mG \frac{\mathbf{s}_i}{s_i^3} + m_i \mathbf{G} \quad (3.121)$$

სადაც $i = 1, 2, 3$, და m სიდიდე სამი მასის ჯამია:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 \quad (3.122)$$

ვექტორი \mathbf{G} შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$\mathbf{G} = G \left(\frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} + \frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} + \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} \right). \quad (3.124)$$

სიმეტრიული ფორმის სამი ერთმანეთთან ბმული განტოლება ზოგადად არ ამოიხსნება, მაგრამ ისინი სამი სხეულის ამოცანის ამოხსნებს მარტივ შემთხვევებში გვაძლევენ.

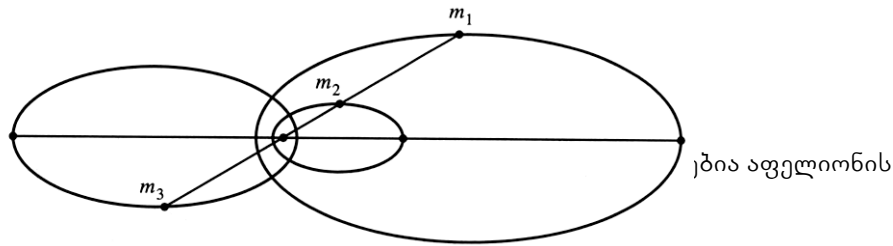
ელიერის ძალისხმევის შედეგად ამოხსნა არსებობს, როდესაც m_2 მასა დანარჩენ ორ მასას შორის გავლებულ წრფეზე ძევს და $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$, და \mathbf{G} კოლინეარულია. 3.28 სურათზე გამოსახულია ელიერის უარყოფითი ენერჯის (ბმული მდგომარეობა) ამონახსნი, როდესაც $m_1 < m_2 < m_3$ და მასები თანაფოკუსიან ელიფსებზე ერთი და იგივე \mathcal{T} პერიოდით მოძრაობენ. მასები თითოეული პერიოდის განმავლობაში პერიჰელიონის მდგომარეობას იძენენ, როდესაც ისინი ელიფსების ღერძის გასწვრივ ერთმანეთთან ახლოს არიან განლაგებულნი და აფელიონის მდგომარეობასაც, როდესაც ისინი იგივე ღერძზე, მაგრამ ერთმანეთისგან მოშორებით არიან განლაგებულნი. 3.28 სურათზე ნაჩვენებია აფელიონის მდებარეობები ორბიტებზე.

თუ $\mathbf{G} = 0$, მოძრაობის განტოლებები განცალკევდებიან და 3.121 ფორმულა ორი სხეულის კეპლერის ამოცანის მსგავსზე დაიყვანება:

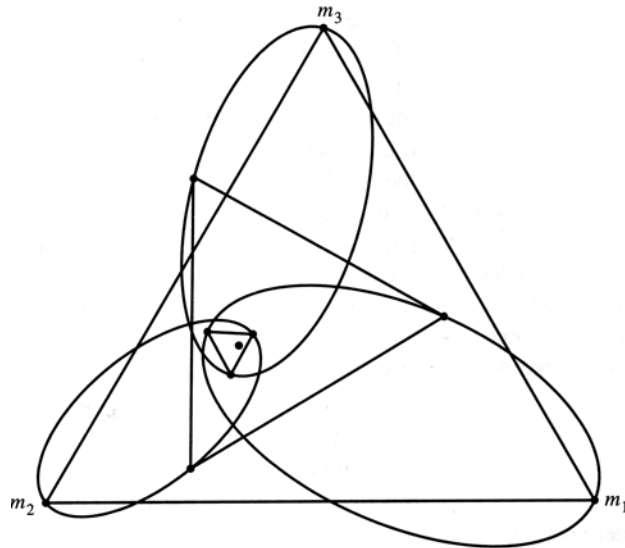
$$\ddot{\mathbf{s}}_i = -mG \frac{\mathbf{s}_i}{s_i^3},$$

როდესაც თითოეული მასა იგივე ფოკუსური ნერტილის მქონე იგივე სიბრტყეში მდებარე ელიფსური ორბიტის გასწვრივ იგივე პერიოდით მოძრაობს. განცალკევება მაშინ ხდება, როდესაც მასები ტოლგვერდა სამკუთხედის წვერებში მდებარეობენ. მოძრაობასთან ერთად განტოლებები განცალკევებულნი რჩებიან, ამიტომ ტოლგვერდა სამკუთხედის პირობა სრულდება, მაგრამ სამკუთხედის ზომა და ორიენტაცია იცვლება. 3.29 სურათზე ნაჩვენებია ლაგრანჟის ელიფსური ამონახსნი, როდესაც მასების შეფარდებაა $m_1 < m_2 < m_3$. სურათზე მასები ერთმანეთთან ახლოს არიან განლაგებულნი

და თითოეული ორი
ანალოგიური გა



სურ. 3.28. ეილერის კოლინეარული ამონახსნი სამი სხეულის ამოცანისთვის, როდესაც $m_1 < m_2 < m_3$. სამი წერტილი აფელიონის მდებარეობებს ასახავენ.



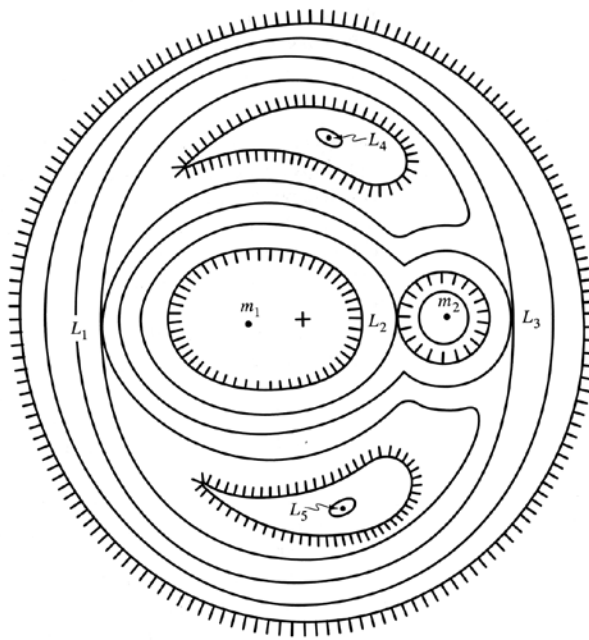
სურ. 3.29. ლაგრანჟის ტოლგვერდა სამკუთხედის ამონახსნი სამი სხეულის ამოცანისთვის, როდესაც $m_1 < m_2 < m_3$.

სამი სხეულის ამოცანისთვის სხვადასხვა ასიმპტოტური ამონახსნებია მიღებული. მაგალითად, თუ სრული ენერგია დადებითია, მაშინ სამივე მასას ერთმანეთისგან მოშორებით შეეძლება მოძრაობა ან ერთ მასას შეუძლია ენერგიის უმეტესი ნაწილის წაღება და დანარჩენი ელიფსურ ორბიტაზე მოძრავი ორი ნაწილაკის დატოვება. თუ ენერგია უარყოფითია, მაშინ ერთმა მასამ დანარჩენი ორი ბმულ მდგომარეობაში შეიძლება დატოვოს ან სამივე მასამ შემოსაზღვრულ ორბიტებზე იმოძრაოს.

სამი სხეულის ამოცანის კერძო შემთხვევაა, როდესაც ორი მასა დიდია და ერთმანეთთან ბმულია, ხოლო მესამე მასა მცირეა და დანარჩენი ორი სხეულის მოძრაობას მხ-

ოლოდ აშფოთებს. ამ მოვლენის მაგალითებია დედამინასა და მთვარეს შორის ორბიტაზე მოძრავი კოსმოსური ხომალდი ან მზის ზეგავლენით მთვარის ორბიტის შეშფოთება. კოსმოსური ხომალდის ორბიტაზე მოძრაობისას ვუშვებთ, რომ დედამინა და მთვარე საკუთარ ორბიტებზე მოძრაობენ და თანამგზავრსა და მათ შორის შებრუნებული კვადრატის მიზიდულობის ძალები მოქმედებენ. დედამინის გარშემო 90 მილის ანუ 150 კილომეტრის სიმაღლეზე მოძრავი თანამგზავრების ორბიტებზე დედამინის მასის არასფერული განაწილება ახდენს ზეგავლენას.

სამი სხეულის ამოცანის კერძო შემთხვევაში, გამართულებელი ფაქტორი დედამინა-მთვარის სისტემის სიახლოვეს მიზიდულობის პოტენციური ენერჯიის განაწილებაა. ჩვენ დედამინასთან ახლოს დედამინისკენ მიმართული გრავიტაციული ძალის ზემოქმედებას განვიცდით, ხოლო მთვარესთან ახლოს ძალა მთვარისკენაა მიმართული. ეს ნიშნავს, რომ ეკვიპოტენციალები ანუ მუდმივი გრავიტაციული ენერჯიის მრუდები ჩაკეტილებია და დედამინას (m_1) და მთვარეს (m_2) გარს ერტყმიან, როგორც ეს 3.30 სურათზეა გამოსახული. დედამინისგან და მთვარისგან დიდი მანძილის მოშორებით, ეკვიპოტენციალები დედამინა-მთვარის წყვილს გარს ერტყმიან. ამ სურათზე დედამინასა და მთვარეს შორის გავლებული ჰორიზონტალური წრფის გარკვეულ წერტილში, რომელსაც L_2 ლაგრანჟის წერტილი ეწოდება, ამ ორ სხეულთან მიზიდულობა სიდიდით ტოლი და მიმართულებით საპირისპიროა, ამიტომ ამ წერტილში მდებარე მცირე სხეულზე მოქმედი ძალა ნულის ტოლია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, L_2 ამ წრფის გასწვრივ ლოკალური პოტენციალური მინიმუმია. უფრო ზუსტად, ეს არის უნაგირა წერტილი, ვინაიდან პოტენციური ენერჯია მინიმალური მხოლოდ დედამინა-მთვარის ლერძის გასწვრივაა და ამ ლერძისადმი პერპენდიკულარული მიმართულებებით მცირდება. ლაგრანჟის ორი დანარჩენი L_1 და L_3 წერტილები დედამინასა და მთვარეს შორის გავლებულ იგივე ლერძზე მდებარეობენ, თანაც დედამინისა და მთვარის ინდივიდუალურ ორბიტებსა და დედამინა-მთვარის წყვილის ორბიტებს შორის გადასვლის წერტილებს ემთხვევიან. ისინიც უნაგირა წერტილებია. ლაგრანჟის მეოთხე და მეხუთე წერტილები დანარჩენი სამისადმი კოლინეარულები არ არიან და გრავიტაციული პოტენციური ენერჯიის ადგილობრივ მინიმუმებს შეესაბამებიან. ამ ორი წერტილის სიახლოვეს მდებარე მასებზე ამ წერტილებისკენ მიმართული გრავიტაციული ძალა მოქმედებს და მასებს მათ გარშემო ელიფსის ფორმის სტაბილურ ორბიტებზე შეუძლიათ მოძრაობა.



სურ. 3.30. $m_1 > m_2$ ორი მასის ეკვიპოტენციალური მრუდების კონტურული რუკა. მრუდები გავლებულია ათვლის სისტემაში, რომელიც ამ ერთმანეთის გარშემო მბრუნავ ორ მასასთან ერთად ბრუნავს.

აქ მოყვანილი მტკიცებების შემონიშნა 3.7 და 3.8 პარაგრაფებში მიღებულ ამონახსნებზე დაკვირვებით შეიძლება. გავიხსენოთ, რომ ჩვენ ამონახსნები მასათა ცენტრის ათვლის სისტემაში ორი მასიური სხეულისთვის ვიპოვნეთ. დავადგინოთ არსებობენ თუ არა ისეთი მდებარეობები, რომლებშიც მცირე საცდელი სხეული ამ ორი სხეულისადმი უძრავი იქნება. საცდელ სხეულში მცირე მასის მქონე სხეულს ვგულისხმობთ, რომელიც დანარჩენი ორი სხეულის მოძრაობაზე ზეგავლენას არ ახდენს. სიმარტივისთვის ვუშვებთ, რომ სხეულები მასათა ცენტრის გარშემო წრიულად მოძრაობენ. m მასის საცდელი სხეულის მოძრაობისთვის ლაგრანჟის ფუნქცია ასე შეიძლება ჩაინეროს:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r, \theta, t), \quad (3.125)$$

სადაც $V(r, \theta, t)$ ორი მასიური სხეულით გამოწვეული, დროზე დამოკიდებული პოტენციალია.

წრიული მოძრაობის შედეგად, ორ სხეულს შორის გავლებული \mathbf{r} რადიუს-ვექტორი მუდმივი სიგრძისაა და ამ ათვლის ინერციულ სისტემაში თანაბარი ω სიხშირით ბრუნავს. თუ ამ სიხშირით მბრუნავ კოორდინატა სისტემაში გადავალთ, ორი მასიური სხეული უძრავი იქნება და ლაგრანჟის ფუნქცია $\theta' = \theta + \omega t$ გარდაქმნის საშუალებით მბრუნავ ათვლის სისტემაში შეგვიძლია ჩავწეროთ. ლაგრანჟის ფუნქცია მბრუნავ კოორდინატებ-

ში $\rho, \theta = \theta' - \omega t$, და z ცილინდრული კოორდინატების საშუალებით გამოისახება, სადაც ρ არის მასათა ცენტრიდან მანძილი, ხოლო θ - მასების შემაერთებული წრფიდან საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ათვლილი კუთხე. მაშასადამე:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2(\dot{\theta}' - \omega)^2 + \dot{z}^2) - V'(\rho, \theta, z), \quad (3.126)$$

ანუ

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}'^2 + \dot{z}^2) - (m\omega\rho^2\dot{\theta}' - \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + V'(\rho, \theta, z)). \quad (3.127)$$

ფორმულის მეხუთე და მეექვსე წევრები შესაბამისად კორიოლისის და ცენტრიდანული ეფექტების პოტენციალებია.

ამის შემდეგ ლაგრანჟის განტოლებებს ჩავწერთ და ამონახსნებს $\dot{\rho} = \dot{z} = \dot{\theta} = 0$ პირობებში ვიპოვნით. ამონახსნი 3.30 სურათზე გამოსახული ლაგრანჟის ხუთი წერტილია. სტაბილურობის განსაზღვრისთვის ამ მდებარეობებიდან მცირე გადაადგილებებს დავაკვირდეთ და მე-6 და მე-12 თავებში მოყვანილი მეთოდები გამოვიყენოთ. სტაბილური მხოლოდ L_4 და L_5 წერტილებია.

L_2 წერტილი მასებს შორის გავლებული წრფის გასწვრივ გადაადგილებებისადმი სტაბილური არ არის, მაგრამ ის მზის შესწავლისთვის ძალიან გამოსადეგია. 1990-იან წლებში, მზესა და დედამიწის შორის არსებული L_2 წერტილი მზის და ჰელიოსფერული ობსერვატორიის **SOHO** მიახლოებითი მდებარეობის ადგილი იყო. ობსერვატორია L_2 წერტილის გარშემო დედამიწა-მზის წრფისადმი პერპენდიკულარულ სიბრტყეში მდებარე ორბიტაზე მოძრაობდა. თანამგზავრი ზუსტად L_2 წერტილში ვერ იქნებოდა, ვინაიდან ამ შემთხვევაში მზის სიკაშკაშის გამო სიგნალებს ვერ მივიღებდით.

დამტკიცება

1. განვიხილოთ სისტემა, რომელშიც ნაწილაკებზე მოქმედი ჯამური ძალები \mathbf{F}'_i კონსერვატიული ძალებისა და სიჩქარის პროპორციული \mathbf{f}'_i ხახუნის ძალებისგან შედგებიან. დაამტკიცეთ, რომ ამგვარი სისტემისთვის, როდესაც მოძრაობა სტაციონარულ მდგო-

მარეობაშია და ხახუნის ძალების მოქმედების შედეგად არ მიიღევა, ვირიალის თეორემა შემდეგი ფორმისაა:

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \sum_i \overline{\mathbf{F}'_i \cdot \mathbf{r}_i},$$

2. $e \sin \psi$ ფურიეს მწკრივად ωt -თი გაშალეთ და დაამტკიცეთ, რომ კეპლერის განტოლების ფორმალური ამონახსნია:

$$\psi = \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(ne) \sin n\omega t,$$

სადაც J_n არის n რიგის ბესელის ფუნქცია. მცირე არგუმენტის შემთხვევაში ბესელის ფუნქცია არგუმენტის ხარისხოვან მწკრივად შეიძლება გაიშალოს. მიიღეთ ψ -ს e -ს ხარისხებად გაშლის პირველი რამდენიმე წევრი.

3. თუ სხვაობა $\psi - \omega t$ წარმოდგენილია ρ -ით, მაშინ კეპლერის განტოლება ასე შეიძლება ჩაინეროს:

$$\rho = e \sin(\omega t + \rho).$$

ρ -სთან თანდათანობით მიახლოებებს $\sin \rho$ -ის ტეილორის მწკრივად ρ -ით გაშლის და შემდეგ ρ -ის კეპლერის განტოლების გამოსახულებით ჩანაცვლების შედეგად მივიღებთ. დაამტკიცეთ, რომ ρ -ით პირველი მიახლოებაა ρ_1 :

$$\tan \rho_1 = \frac{e \sin \omega t}{1 - e \cos \omega t},$$

ხოლო შემდეგი მიახლოება ამ ფორმულის საშუალებით გამოითვლება:

$$\sin^3(\rho_2 - \rho_1) = -\frac{1}{6} e^3 \sin(\omega t + \rho_1)(1 + e \cos \omega t),$$

რომელიც e^4 რიგის წევრების ჩათვლითაა ზუსტი.

4. დაამტკიცეთ, რომ განმზიდი გაბნევის დროს, გაბნევის კუთხის Θ შეჯახების პარამეტრზე დამოკიდებულების ფუნქცია (3.96 ფორმულა) ასე შეიძლება ჩაინეროს:

$$\Theta = \pi - 4s \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{r_m^2 \left(1 - \frac{V}{E}\right)^2 - s^2(1 - \rho^2)}},$$

ხოლო თუ ინტეგრების ცვლადს რაიმე $\rho(r)$ ფუნქციით შევცვლით, მაშინ:

$$\Theta = \pi - 4s \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{r_m^2}{\rho^2 E} (V(r_m) - V(r)) + s^2(2 - \rho^2)}}.$$

დაამტკიცეთ, რომ განმზიდი პოტენციალის პირობებში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $r \rightarrow r_m$ ზღვარში არასდროს სინგულარული არ არის. ვინაიდან ინტეგრებას განსაზღვრუ-

ლი ზღრები გააჩნია, ამგვარი ფორმულირება $\Theta(s)$ -ის რიცხობრივი გამოთვლისას საკმაოდ მოსახერხებელია და გაუს-ლეჟანდრის ინტეგრების სქემების გამოყენების საშუალებას იძლევა.

5. წინა სავარჯიშოში მოყვანილი ფორმულებით $\Theta(s)$ და დიფერენციალური $\sigma(\Theta)$ განივი კვეთი რიცხობრივად გამოთვალეთ, როდესაც სრული ენერჯიაა $E = 1.2V_0$ და განმზიდი პოტენციალია:

$$V = \frac{V_0}{1+r}$$

გაუს-ლეჟანდრის 16 წერტილიანი კვადრატურა ადეკვატურ სიზუსტეს გვთავაზობს. ინვესს თუ არა გაბნევა ცისარტყელას?

6. თუ განმზიდი პოტენციალი r -თან ერთად მონოტონურად მცირდება, მაშინ $V(r_m)$ -თან შედარებით მაღალი ენერჯიების პირობებში გაბნევის კუთხე მცირე იქნება. ამგვარ პირობებში დაამტკიცეთ, რომ 3.97 ფორმულის გარდაქმნა შესაძლებელია ისეთი სახით, რომ გადახრის კუთხე მიახლოებით შემდეგი ფორმულით განისაზღვრებოდეს:

$$\Theta = \frac{1}{E} \int_0^1 \frac{(V(u_m) - V(u)) dy}{(1 - y^2)^{3/2}},$$

სადაც $y = u/u_m$. ასევე დაამტკიცეთ, რომ თუ $V(u)$ -ს Cu^n ფორმა აქვს, სადაც n დადებითი მთელი რიცხვია, მაშინ მაღალი ენერჯიების ზღვარში განივი კვეთი $\Theta = -2(1+1/n)$ -ის პროპორციულია.

7. ა) დაამტკიცეთ, რომ სამიზნე ნაწილაკის ასხლეტის კუთხე გაბნეული ნაწილაკის სანყისი მიმართულების მიმართ არის

$$\Phi = \frac{1}{2}(\pi - \Theta).$$

ბ) დაკვირვებების თანახმად, დრეკადი გაბნევისას Θ -ით გამოსახული გაბნევის განივი კვეთი იზოტროპიულია. როგორი სახისაა ალბათობათა შესაბამისი განაწილებები დაცემული ნაწილაკის გაბნევის E_1 ენერჯისთვის და სამიზნე ნაწილაკის ასხლეტის E_2 ენერჯისთვის?

8. დაამტკიცეთ, რომ ლაბორატორიულ სისტემაში ϑ გაბნევის კუთხე გაბნევამდე E_0 ენერჯიას და გაბნევის შემდგომ E_1 ენერჯიას შემდეგი ფორმულით უკავშირდება:

$$\cos \vartheta = \frac{m_2 + m_1}{2m_1} \sqrt{\frac{E_1}{E_0}} - \frac{m_2 - m_1}{2m_1} \sqrt{\frac{E_0}{E_1}} - \frac{m_2 Q}{2m_1 \sqrt{E_0 E_1}}.$$

9. დაამტკიცეთ, რომ ცენტრალური ძალის ამოცანა ელიფსური ფუნქციებით ამოხსნადია, როდესაც ძალა მანძილის ხარისხოვანი ფუნქციაა შემდეგი მაჩვენებლებით:

$$n = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}.$$

საპარაქიზოები

10. M მასის პლანეტა $e = 1 - \alpha$ ექსცენტრისიტეტის ორბიტაზე, სადაც $\alpha \ll 1$, მზის გარშემო მოძრაობს. დავუშვათ, მზის მოძრაობის უგულებელყოფა შესაძლებელია და მხოლოდ გრავიტაციული ძალები მოქმედებენ. როდესაც პლანეტა მზიდან მაქსიმალურ მანძილზეა, მას m მასის კომეტა ეჯახება, სადაც $m \ll M$ და კომეტა მხეხი მიმართულებით მოძრაობს. დავუშვათ, შეჯახება სრულიად არადრეკადია. გამოთვალეთ კომეტის მინიმალური კინეტიკური ენერჯია, როდესაც ახალი ორბიტა პარაბოლის ფორმას მიიღებს.

11. ორი ნაწილაკი ერთმანეთის გარშემო წრიულ ორბიტაზე, გრავიტაციული ძალების ზემოქმედების შედეგად τ პერიოდით მოძრაობს. დროის გარკვეულ მომენტში მოძრაობას აჩერებენ და ნაწილაკები ერთმანეთზე დაცემას იწყებენ. დაამტკიცეთ, რომ შეჯახება $\tau/4\sqrt{2}$ დროის შემდეგ მოხდება.

12. დავუშვათ, აირის ატომებს შორის შორსქმედი ურთიერთქმედება არსებობს, რომლის შესაბამისი ცენტრალური ძალები შემდეგი პოტენციალიდან მიიღებიან:

$$U(r) = \frac{k}{r^m},$$

სადაც r არის მანძილი ნებისმიერ ორ ატომს შორის და m - დადებითი მთელი რიცხვი. ასევე დავუშვათ, რომ ნებისმიერი ატომის მიმართ დანარჩენი ატომები სივრცეში ისე არიან განაწილებულნი, რომ მათი მოცულობითი სიმკვრივე ბოლცმანის კოეფიციენტით მოიცემა:

$$\rho(r) = \frac{N}{V} e^{-U(r)/kT},$$

სადაც N არის ატომების მთლიანი რაოდენობა V მოცულობაში. გამოთვალეთ ატომებს შორის მოქმედი ძალების შედეგად მიღებული კლაუზიუსის ვირიალის დამატება და ბოილის კანონში შესატანი კორექცია. N დიდი რიცხვი აიღეთ, რათა ყველა ჯამი ინტეგრალით შეიცვალოს. ჩაკეტილი სახით შედეგების მიღება ნებისმიერი დადებითი m -ისთვის შეიძლება, მაგრამ ალგებრა ბევრად მარტივდება თუ $m = +1$ ავირჩევთ.

13. ა) დაამტკიცეთ, რომ თუ ნაწილაკი წრეზე მდებარე წერტილისკენ მიმართული მიმზიდველი ცენტრალური ძალის ზემოქმედების შედეგად წრიულ ორბიტაზე მოძრაობს, მაშინ ძალა მანძილის შებრუნებული მეხუთე ხარისხის მიხედვით იცვლება

ბ) დაამტკიცეთ, რომ ზემოთ აღწერილი ორბიტის შემთხვევაში ნაწილაკის სრული

ენერგია ნულის ტოლია

გ) გამოთვალეთ მოძრაობის პერიოდი

დ) \dot{x} , \dot{y} და v წრის გარშემო კუთხის ფუნქციის სახით გამოთვალეთ და დაამტკიცეთ, რომ როდესაც ნაწილაკი ძალის ცენტრზე გადის, სამივე სიდიდე უსასრულოა.

14. ა) წრიული და პარაბოლის ფორმის ორბიტები $1/r$ მიმზიდველ პოტენციალში მდებარეობენ და თანაბარი იმპულსის მომენტები აქვთ. დაამტკიცეთ, რომ პარაბოლის პერიპელიონის მანძილი წრის რადიუსის ნახევარია.

ბ) დაამტკიცეთ, რომ სავარჯიშოს ა) ნაწილში მოცემული ცენტრალური ძალის შემთხვევაში, პარაბოლური ორბიტის ნებისმიერ წერტილში ნაწილაკის სიჩქარე იგივე წერტილზე გამავალ წრიულ ორბიტაზე ნაწილაკის სიჩქარის $\sqrt{2}$ -ია.

15. მეტეორი დედამიწას v სიჩქარით ეჯახება და ზენიტთან ϕ კუთხეს ადგენს. დავუშვათ, ორბიტის სიჩქარე დედამიწიდან დიდი მოშორებით v' იყო და ზენიტსადმი ϕ' კუთხეს ადგენდა. დედამიწის მიზიდულობის შედეგად მეტეორი დედამიწის ზედაპირის მკვეთ ჰიპერბოლურ ორბიტაზე ამოძრავდა. აჩვენეთ როგორ შეიძლება v' -ს და ϕ' -ს განსაზღვრა v -დან და ϕ -დან ცნობილი მუდმივების საშუალებით.

16. დაამტკიცეთ, რომ მცირე e ექსცენტრისიტეტის მქონე კეპლერის ელიფსურ ორბიტაზე ნაწილაკის კუთხური მოძრაობა, რომელსაც ელიფსის ცარიელი ფოკუსიდან (ფოკუსიდან, რომელიც მიზიდულობის ცენტრი არ არის) აკვირდებიან, e -ით პირველი რიგის მიახლოებით თანაბარია. სწორედ ამ თეორემის წყალობით ხდება პლანეტების მოძრაობის პტოლემეისეული სურათი რეალობასთან საკმაოდ მიახლოებული. ამ სურათზე მზე თანაბრად მოძრაობს წრეზე, რომლის ცენტრი დედამიწიდან ეკვანტად ნოდებული მანძილითაა დაშორებული. თუ ეკვანტი ნამდვილი ელიფსური ორბიტის ორ ფოკუსს შორის მანძილია, მაშინ კუთხურ მოძრაობას პტოლემეისეული სურათი e -ით პირველი რიგის მიახლოების სიზუსტით ასახავს.

17. მეცნიერულ ფანტასტიკაში ძალიან გავრცელებულია დედამიწის ტყუპი პლანეტის („პლანეტა X“) ცნება, რომლის მასა, ენერგია და იმპულსი დედამიწის იდენტურია, მაგრამ ეს პლანეტა ორბიტაზე დედამიწის მიმართ 180° -ით არის წინაცვლებული და მზით არის დამალული. ორბიტის ელიფსურობის გამო ეს პლანეტა მზით ყოველთვის დამალული არ იქნება. დავუშვათ, ტყუპისცალი პლანეტა დედამიწის კეპლერის ორბიტაზე მოძრაობს და აფელიონზე მაშინაა, როდესაც დედამიწა პერიპელიონზეა. e ექსცენტრისიტეტით პირველი რიგის მიახლოების სიზუსტით გამოთვალეთ ტყუპისცალ პლანეტასა და მზეს შორის მაქსიმალური კუთხური დაშორება დედამიწის თვალთახედვიდან. შესაძლებელი იქნება თუ არა ამგვარი პლანეტის დედამიწიდან დანახვა? დავუშვათ, ტყუპისცალი პლანეტა დედამიწის ორბიტის იდენტური ზომის და ფორმის ელიფსურ ორბიტაზე მოძრაობს, რომელიც დედამიწის ორბიტიდან 180° -ით არის მოტრიალებული, თანაც დედამიწა და

ტყუპისცალი პლანეტა პერიჰელიონზე ერთდროულად ხვდება. გაიმეორეთ გამოთვლები და შეადარებით ხილულობა ორივე შემთხვევაში.

18. ელიფსური ორბიტის პერიგეაზე მყოფი ნაწილაკი რადიალური მიმართულების N ძალის იმპულსის მოქმედებას განიცდის და სხვა ელიფსურ ორბიტაზე ინაცვლებს. ახალი დიდი ნახევარღერძი, ექსცენტრისიტეტი და მიმართულება ძველი მნიშვნელობების საშუალებით განსაზღვრეთ.

19. ნაწილაკი იუკავას პოტენციალით აღწერილ ძალის ველში მოძრაობს:

$$V(r) = -\frac{k}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right),$$

სადაც k და a დადებითებია.

- ა) დანერეთ მოძრაობის განტოლებები და ისინი ექვივალენტურ ერთგანზომილებიან ამოცანამდე დაიყვანეთ. ეფექტური პოტენციალის გამოყენებით ენერჯიის და იმპულსის მომენტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისას ორბიტების ხარისხობრივ ბუნებაზე იმსჯელეთ.
- ბ) დაამტკიცეთ, რომ თუ ორბიტა მიახლოებით წრიულია, აპსიდები თითოეული შემობრუნებისას დაახლოებით $\pi\rho/a$ -ით წინ გადაადგილებიან, სადაც ρ წრიული ორბიტის რადიუსია.

20. მზის სისტემაში მტვრის თანაბარი განაწილება პლანეტაზე მოქმედ მზის მიზიდულობას შემდეგ ძალას უმატებს:

$$\mathbf{F} = -mC\mathbf{r},$$

სადაც m არის პლანეტის მასა, C - მიზიდულობის მუდმივის და მტვრის სიმკვრივის პროპორციული მუდმივა, ხოლო \mathbf{r} - მზიდან პლანეტისკენ გავლებული რადიუს-ვექტორი. დამატებითი ძალა მზესა და პლანეტას შორის მოქმედ მიზიდულობის ძალაზე ბევრად მცირეა.

- ა) გამოთვალეთ r_0 რადიუსის წრიულ ორბიტაზე მოძრავი პლანეტის პერიოდი.
- ბ) გამოთვალეთ რადიალური რხევების პერიოდი წრიული ორბიტიდან მცირე შემფოთებისას.
- გ) დაამტკიცეთ, რომ თითქმის წრიული ორბიტა პრეცესიული ელიფსით მიახლოებით შეიძლება შეიცვალოს და გამოთვალეთ პრეცესიის სიხშირე. პრეცესია ორბიტული კუთხურის სიჩქარის მიმართულებისაა თუ პირიქით?

21. დაამტკიცეთ, რომ ქვემოთ მოყვანილ პოტენციურ ველში მოძრავი ნაწილაკის მოძრაობა კეპლერის პოტენციალის ზემოქმედების ქვეშ მოძრაობის იდენტურია, როდესაც კოორდინატთა სისტემა ბრუნავს ან პრეცესირებს ძალის ცენტრის გარშემო:

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2}$$

უარყოფითი სრული ენერჯიის პირობებში დაამტკიცეთ, რომ თუ დამატებითი პოტენ-

ციალი კეპლერის პოტენციალთან შედარებით მცირეა, მაშინ ელიფსური ორბიტის პრეცესიის კუთხური სიჩქარეა:

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi mh}{l^2 \tau}.$$

მერკურის პერიჰელიონი საუკუნეში $40''$ -ით (კუთხური სეკუნდი) პრეცესირებს. დაამტკიცეთ, რომ ამგვარი პრეცესია კლასიკური მეთოდებით გამოითვლება, თუ განზომილების არმქონე სიდიდე

$$\eta = \frac{h}{ka}$$

7×10^{-8} -ის ტოლი მცირე სიდიდეა. მერკურის ორბიტის ექსცენტრისიტეტია 0,206 და პერიოდი 0,24 წელი.

22. 21-ე სავარჯიშოში მოყვანილი პოტენციალი r^{-2} -ის მსგავსად მოქმედებს და მასში შემავალი დამატებითი წევრი ექვივალენტურ ერთგანზომილებიან პოტენციალში შემავალ ცენტრიდანულ ბარიერს წააგავს. მაშინ რატომ ხდება, რომ ეს დამატებითი ძალა ორბიტის პრეცესიას იწვევს, ხოლო l -ის ცვლილებით გამონწეული ჯებირის დამატება კი არა?

23. წელიწადის, მთვარის თვის (27,3 დღე) და დედამიწის (1.49×10^8 კმ) და მთვარის (3.8×10^5 კმ) ორბიტების საშუალო რადიუსების საშუალებით მზის მასის დედამიწის მასასთან შეფარდება გამოთვალეთ.

24. დაამტკიცეთ, რომ გრავიტაციულ ველში ელიფსური მოძრაობისას რადიალური სიჩქარე ასე გამოითვლება:

$$\dot{r} = \frac{\omega a}{r} \sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}.$$

r -ის მაგივრად ექსცენტრიული ანომალიის ψ ცვლადი შემოიტანეთ და დაამტკიცეთ, რომ მიღებული დიფერენციალური განტოლების ინტეგრების შედეგად კეპლერის განტოლება მიიღება.

25. თუ e ექსცენტრისიტეტი მცირეა, ψ ექსცენტრიული ანომალიის ωt -ს ფუნქციის სახით მოცემული კეპლერის განტოლება იტერაციული მეთოდით და კომპიუტერის საშუალებით იოლად ამოიხსნება. ამ მეთოდის თანახმად $e \sin \psi$ წევრი ψ -ზე დაბალი რიგისა მიიჩნევა. თუ n რიგის იტერაციულ ამონახსნს ψ_n სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, მაშინ იტერაციული კავშირია:

$$\psi_n = \omega t + e \sin \psi_{n-1}.$$

ამ იტერაციული პროცედურის გამოყენებით ψ -ს e -ს ხარისხებად გაშლის ანალიტიკური ფორმა დაადგინეთ, რომელიც სულ მცირე e^3 -ით არის გამოსახული.

26. პერიჰელიონზე გასვლებს შორის („ანომალური წელი“) დედამიწის პერიოდი 265,2596 საშუალო მზის დღე, ხოლო დედამიწის ორბიტის ექსცენტრისიტეტია 0,0167504. დავუშვათ, დედამიწა კეპლერის ელიფსურ ორბიტაზე მოძრაობს. პერიჰელიონიდან რა კუთხეს შემოწერს დედამიწა ორბიტაზე ანომალური წლის ერთი მეოთხედის განმავლობაში? პასუხი კუთხური სეკუნდის სიზუსტით ან უფრო ზუსტად მიიღეთ.

27. $1/r$ პოტენციალში ჰიპერბოლური მოძრაობისას F ექსცენტრიული ანომალიის ანალოგია :

$$r = a(e \cosh F - 1),$$

სადაც $a(e - 1)$ მაქსიმალური მიახლოების მანძილია. გამოთვალეთ კეპლერის განტოლების ანალოგი, რომელიც უახლოესი მიახლოებიდან ათვლილ t დროს F -ის ფუნქციის სახით გვაძლევს.

28. **მაგნიტური მონოპოლს** (თუ ის საერთოდ არსებობს) $\mathbf{B} = b\mathbf{r}/r^3$ სინგულარული მაგნიტური ველი ქმნის, სადაც b მუდმივაა (მაგნიტური მუხტის მნიშვნელობა მისი არსებობის შემთხვევაში). დავუშვათ, m მასის ნაწილაკი მაგნიტური მონოპოლის ველში და $V(r) = -k/r$ პოტენციალიდან მიიღებული ცენტრალური ძალის ველში მოძრაობს.

ა) ლორენცის ძალის საშუალებით (1.60 ფორმულა) ნიუტონის მოძრაობის განტოლება ჩანერეთ. $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$ ნამრავლის საშუალებით დაამტკიცეთ, რომ ვიდრე მექანიკური იმპულსის მომენტი მუდმივი არ არის (ძალის ველი ცენტრალური არ არის), არსებობს მუდმივი ვექტორი:

$$\mathbf{D} = \mathbf{L} - \frac{qb}{c} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

ბ) 3.79 ფორმულიდან 3.82 ფორმულამდე მისვლის მეთოდის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ ზოგიერთი $f(r)$ -ისთვის ლაპლასი-რუნგე-ლენცის ვექტორის ანალოგიური მუდმივი ვექტორი არსებობს, რომელშიც \mathbf{D} იგივე როლს ასრულებს, რასაც \mathbf{L} კეპლერის ძალის ამოცანაში.

29. თუ ნაწილაკის ტრაექტორიის გასწვრივი იმპულსის ყველა ვექტორი გადატანილია ისე, რომ სათავეს ძალის ცენტრიდან იღებენ, მაშინ ვექტორის ბოლოები ნაწილაკის **ჰოდოგრაფს** შემოწერენ. ჰოდოგრაფი ორბიტის გრაფიკა და მექანიკის ისტორიის საკმაოდ ადრეულ პერიოდს მიეკუთვნება. \mathbf{L} ვექტორი ლაპლასი-რუნგე-ლენცის ვექტორზე გაამრავლეთ და დაამტკიცეთ, რომ კეპლერის ელიფსური მოძრაობის ჰოდოგრაფი mk/l რადიუსის წრეა, რომლის სათავე y ღერძზე ძალის ცენტრიდან A/l მანძილითაა გადატანილი.

30. რა ცვლილებები მოხდება რეზერფორდის გაბნევაში თუ კულონის ძალა განმზიდის ნაცვლად მიმზიდველი გახდება?

31. გამოიკვლიეთ $f = kr^{-3}$ განმზიდი ცენტრალური ძალით გამოწვეული გაბნევა. დაამტკიცეთ, რომ დიფერენციალური განივი კვეთია:

$$\sigma(\Theta)d\Theta = \frac{k}{2E} \frac{(1-x)dx}{x^2(2-x)^2 \sin \pi x},$$

სადაც x არის Θ/π შეფარდება, ხოლო E - ენერგია.

32. ცენტრალური ძალის პოტენციალი ბირთვულ ფიზიკაში ხშირად გვხვდება და ის **მართკუთხა ორმოა**:

$$V = 0 \quad r > a$$

$$= -V_0 \quad r \leq a.$$

დაამტკიცეთ, რომ კლასიკურ მექანიკაში ამგვარი პოტენციალით გამოწვეული გაბნევა a რადიუსის და ფარდობითი გარდატეხის ქვემოთ მოყვანილი მაჩვენებლის მქონე სფეროს მიერ სინათლის სხივების გარდატეხის იდენტურია:

$$n = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}}.$$

(ეს ტოლობა ცხადყოფს, თუ რატომ გახდა შესაძლებელი გარდატეხის მოვლენის ერთდროულად ახსნა ჰიუგენსის ტალღების და ნიუტონის მექანიკური კორპუსკულების საშუალებით). აგრეთვე დაამტკიცეთ, რომ დიფერენციალური განივი კვეთია:

$$\sigma(\Theta) = \frac{n^2 a^2}{4 \cos \frac{\Theta}{2}} \frac{(n \cos \frac{\Theta}{2} - 1)(n - \cos \frac{\Theta}{2})}{(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\Theta}{2})^2}.$$

რისი ტოლია სრული განივი კვეთი?

33. m მასის ნაწილაკი მიზიდულობის მოქმედების შედეგად ბრუნვის პარაბოლოიდის შიგნით ხახუნის გარეშე მოძრაობს. პარაბოლოიდის ღერძი ვერტიკალურია. ჩამოაყალიბეთ ამგვარი მოძრაობის ექვივალენტური ერთგანზომილებიანი ამოცანა. ნაწილაკის სანყისი სიჩქარის რა პირობა იწვევს წრიულ მოძრაობას? გამოთვალეთ წრიული მოძრაობის მიმართ მცირე რხევების პერიოდი.

34. განვიხილოთ კულონის განმზიდი და ნაკვეთილი პოტენციალი:

$$V = \frac{k}{r} \quad r > a$$

$$= \frac{k}{a} \quad r \leq a.$$

$E > k/a$ სრული ენერგიის მქონე ნაწილაკისთვის Θ გაბნევის კუთხის s/s_0 -ზე დამოკიდებულების ფუნქციის გამოსახულება მიიღეთ, სადაც s_0 შეჯახების პარამეტრია, რომლის დროსაც პერიაფსისი $r = a$ ნერტილში ჩნდება. ააგეთ Θ კუთხის s/s_0 -ზე დამოკიდებულების ფუნქციის რიცხვითი გრაფიკი, როდესაც $E = 2k/a$. რა დასკვნას გამოიტანთ კუთხური გაბნევის განივი კვეთის შესახებ Θ -ის s/s_0 -ზე დამოკიდებულებიდან ამ შემთხვევაში?

35. კულონის განმზიდი და ნაკვეთილი პოტენციალის კიდევ ერთი ფორმა:

$$V = \frac{k}{r} - \frac{k}{a} \quad r < a$$

$$= 0 \quad r > a.$$

გაბნევის კუთხისა და გაბნევის დიფერენციალური განივი კვეთისთვის ჩაკეტილი ფორმის გამოსახულებები მიიღეთ. ეს გამოსახულებები ყველაზე უფრო ადვილად მაქსი-

მალური მიახლოების მანძილის α -ს ერთეულებში გამოსახული პარამეტრის საშუალებით მიიღებინ. რისი ტოლია სრული განივი კვეთი?

36. სამ სხეულთან დაკავშირებული კერძო ამოცანა წრიულ ორბიტაზე ერთმანეთის გარშემო მოძრავი ორი მასისა და ბევრად მცირე მასის მქონე მესამე სხეულისგან შედგება, რომელიც დანარჩენი სხეულების მოძრაობაზე ზეგავლენას არ ახდენს.

- ა) განსაზღვრეთ $V(x, y)$ ეფექტური პოტენციალი, როდესაც x ღერძი ორი უფრო დიდი მასის წრფეა. ააგეთ $V(x, 0)$ ფუნქციის გრაფიკი და დაამტკიცეთ, რომ ორ მასას ორი „ღრმული“ (სტაბილური ნონასწორობის წერტილები) შეესაბამება. ასევე დაამტკიცეთ, რომ სამი „ბორცვი“ (არასტაბილური ნონასწორობის სამი წერტილი) არსებობს.
- ბ) კომპიუტერული პროგრამის საშუალებით სამი სხეულის ამოცანისთვის რამდენიმე ორბიტა გამოთვალეთ. მრავალი ორბიტის შემთხვევაში მცირე მასა განიდევენება. დაუშვით, რომ მცირე მასის მდებარეობა და სიჩქარის ვექტორი მოცემულია.

მყარი სხეულების მოძრაობის კინემატიკა

მყარი სხეული ჰოლონომიურ შეზღუდვებს დაქვემდებარებულ ნივთიერ წერტილთა სისტემაა, რომელშიც წერტილებს შორის მანძილები მოძრაობის განმავლობაში არ იცვლებიან. მყარი სხეულის ცნება იდეალიზირებული, მაგრამ მოსახერხებელია და მყარი სხეულის მოძრაობის მექანიკა სრულყოფილ შესწავლას საჭიროებს. ამ თავში ძირითადად მყარ სხეულთა **კინემატიკას** ანუ მათი მოძრაობის ბუნებასა და თვისებებს შევისწავლით. ასევე ყურადღებას დავუთმობთ მათემატიკურ მეთოდებს, რომლებიც თავისთავადაც საინტერესონი არიან და ფიზიკის მრავალ სხვა დარგშიც გამოიყენებიან.

განსაკუთრებული მნიშვნელობა მყარი სხეულის ბრუნვით მოძრაობას აქვს. ბრუნვის შესწავლის შედეგად, ინერციულ და მბრუნავ ათვლის სისტემებში ერთი და იგივე ვექტორის ცვლილების ტემპებს შორის დამოკიდებულებას დავადგენთ. მოგვიანებით კინემატიკას მცირე ხნით თავს დავანებებთ და მბრუნავ ათვლის სისტემაში მოძრაობის დინამიკას აღვწერთ. მომდევნო თავში, ლაგრანჟის ფორმულების დახმარებით, მოდებული ძალები-სა და მბრუნის მომენტების მიერ განვრცობილი საგნების ამოძრავებას განვიხილავთ.

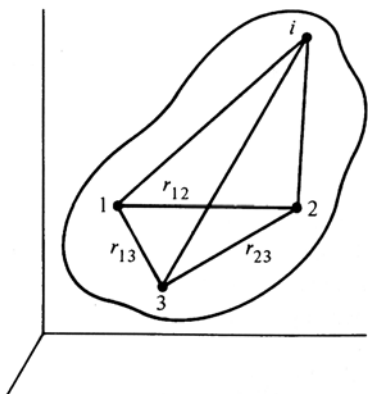
4.1 მყარი სხეულის დამოუკიდებელი კოორდინატები

ვიდრე მყარი სხეულის მოძრაობას განვიხილავთ, მანამდე უნდა დავადგინოთ, თუ რამდენი დამოუკიდებელი კოორდინატია საჭირო მოძრაობის კონფიგურაციის განსაზღვრისთვის. გამოცდილებიდან ვიცით, რომ ამისთვის ექვსი დამოუკიდებელი კოორდინატი არსებობს. სამი გარე კოორდინატი სხეულში რაიმე ათვლის წერტილის მდებარეობის დასადგენად გამოიყენება, ხოლო დანარჩენი სამი გარე კოორდინატებისადმი სხეულის ორიენტაციას ასახავს.

N რაოდენობის ნივთიერი წერტილისგან შემდგარ მყარ სხეულს მაქსიმუმ $3N$ თავისუფლების ხარისხი შეიძლება ჰქონდეს, მაგრამ თავისუფლების ხარისხს შეზღუდვები ამცირებენ, რომლებიც შემდეგი სახის განტოლებებით გამოისახებიან:

$$r_{ij} = c_{ij}. \quad (4.1)$$

r_{ij} არის მანძილი i და j ნივთიერ წერტილებს შორის, ხოლო c -ები მუდმივებია. თავისუფლების ხარისხის ნამდვილი რაოდენობის მიღება $3N$ -დან შეზღუდვის განტოლებების გამოკლებით შეუძლებელია, ვინაიდან 4.1 ფორმის განტოლება $\frac{1}{2}N(N-1)$ რაოდენობის შეიძლება იყოს, რაც დიდი N -ის შემთხვევაში $3N$ -ზე ბევრად მეტია. მართლაც, 4.1 ფორმულებიდან ყველა დამოუკიდებელი არ არის.



სურ. 4.1. მყარ სხეულში წერტილის მდებარეობის განსაზღვრა სამი ათვლის წერტილიდან მისი დაშორების დახმარებით

მყარ სხეულში ნივთიერი წერტილის ფიქსირებისთვის სხეულის ყველა წერტილიდან მისი დაშორების განსაზღვრა აუცილებელი არ არის, საკმარისია მხოლოდ ნებისმიერი სამი არაკოლინეარული წერტილიდან მანძილი გამოითვალოს (იხ. სურ. 4.1). მას შემდეგ, რაც მყარ სხეულში სამი ნივთიერი წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება, შეზღუდვები ყველა დანარჩენი ნივთიერი წერტილის მდებარეობას აფიქსირებენ. აქედან გამომდინარე, თავისუფლების ხარისხი 9-ზე მეტი არ შეიძლება იყოს. ათვლის სამი წერტილი თავისთავად დამოუკიდებელი არ არის და სიმყარის შეზღუდვის სამ განტოლებას ექვემდებარება:

$$r_{12} = C_{12}, \quad r_{23} = C_{23}, \quad r_{13} = C_{13}.$$

ეს განტოლებები თავისუფლების ხარისხს 6-მდე ამცირებენ. მხოლოდ ექვსი კოორდინატის საჭიროება სხვა მეთოდითაც შეგვიძლია დავადგინოთ. ათვლის ერთ-ერთი წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისთვის სამი კოორდინატია საჭირო, მაგრამ ვინაიდან პირველი წერტილი ფიქსირებულია, მეორე წერტილის განსაზღვრა მხოლოდ ორი კოორდინატით შეიძლება, რადგან მეორე წერტილი პირველ წერტილზე ცენტრირებული სფეროს ზედაპირზე მოძრაობს. ორი წერტილის განსაზღვრის შემდეგ მესამე წერტილს თავისუფლების ერთი ხარისხი აქვს, ვინაიდან მას მხოლოდ დანარჩენი ორი წერტილის შემაერთებელი ღერძის მიმართ შეუძლია ბრუნვა. ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარე, ექვსი კოორდინატი სრულიად საკმარისია.

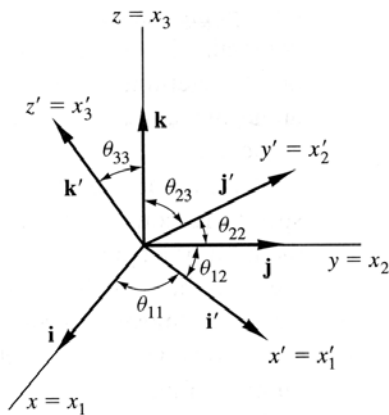
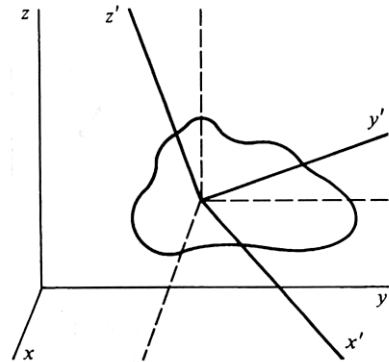
სივრცეში მყარი სხეულის კონფიგურაციის განსაზღვრისთვის ექვსი დამოუკიდებელი განზოგადებული კოორდინატია საჭირო და სხეულში არსებული ნივთიერი წერტილების რაოდენობას უწყვეტი სხეულის ზღვარშიც კი მნიშვნელობა არ აქვს. სხეულს სიმყარის გარდა სხვა შეზღუდვებიც შეიძლება გააჩნდეს. მაგალითად, სხეული შესაძლებელია ზედაპირზე მოძრაობდეს ან ერთი წერტილი ფიქსირებული ჰქონდეს. ამ შემთხვევაში დამატებითი შეზღუდვები თავისუფლების ხარისხს და მაშასადამე დამოუკიდებელი კოორდინატების რაოდენობას ამცირებენ.

როგორ უნდა მივანიჭოთ სხეულს კოორდინატები? გაითვალისწინეთ, რომ მყარი სხეულის კონფიგურაცია გარე სივრცის კოორდინატთა ღერძებისადმი ამ მყარ სხეულზე ფიქსირებული დეკარტის კოორდინატთა ღერძების მდებარეობით განისაზღვრება. ცხადია, რომ მყარ სხეულზე ფიქსირებული ღერძების ათვლის სათავეს კოორდინატების განსაზღვრისთვის სამი კოორდინატია საჭირო. დანარჩენი სამი კოორდინატი ამ ღერძების მიმართულებას განსაზღვრავს გარე ღერძების პარალელური და სხეულზე ფიქსირებული ღერძების ათვლის სათავეს მქონე კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

დეკარტის ღერძთა სიმრავლის მიმართულება იგივე ათვლის სათავეს მქონე რაიმე სხვა სიმრავლისადმი რამდენიმე მეთოდით განისაზღვრება. ყველაზე მოსახერხებელი გზა შტრიხიანი ღერძების არაშტრიხიანი ღერძებისადმი მიმმართველი კოსინუსების დადგენაა. მაშასადამე, x' ღერძი x , y და z ღერძებისადმი α_1 , α_2 , α_3 მიმმართველი კოსინუსებით განისაზღვრება. თუ \mathbf{i} , \mathbf{j} და \mathbf{k} არიან ერთეულოვანი ვექტორები x , y და z ღერძების გასწვრივ, ხოლო \mathbf{i}' , \mathbf{j}' და \mathbf{k}' იგივე ფუნქციას შტრიხიანი სისტემისთვის ასრულებენ (იხ. სურ. 4.3), მაშინ მიმმართველი კოსინუსებია:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{11} &= \cos(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}) = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' \\ \cos \theta_{12} &= \cos(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}) = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' \\ \cos \theta_{21} &= \cos(\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}) = \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}' \\ \cos \theta_{22} &= \cos(\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}) = \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' \end{aligned} \quad (4.2)$$

სურ. 4.2. x, y და z ღერძები ღერძების გარე ათვლის სიმრავლეს წარმოადგენენ. x', y' და z' ღერძები მყარ სხეულზე არიან ფიქსირებულნი



სურ. 4.3. სხეულის ღერძთა სიმრავლის მიმმართველი კოსინუსები ღერძების გარე სიმრავლისადმი

და ასეთივე ფორმულები გვექნება $\cos \theta_{13}$ -სთვის, $\cos \theta_{31}$ -სთვის და ა.შ. ყურადღება მი-
აქციეთ, რომ θ_{ij} კუთხის განსაზღვრისას პირველი ინდექსი შტრიხიან სისტემაზე, ხოლო
მეორე ინდექსი არაშტრიხიან სისტემაზე მიუთითებს. მიმმართველი კოსინუსები შტრიხ-
იან სისტემაში მდებარე ერთეულოვანი ვექტორის არაშტრიხიანი სისტემის ერთეულო-
ვანი ვექტორების საშუალებით გამოსახვისთვისაც შეგვიძლია გამოვიყენოთ:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= \cos \theta_{11} \mathbf{i} + \cos \theta_{12} \mathbf{j} + \cos \theta_{13} \mathbf{k} \\ \mathbf{j}' &= \cos \theta_{21} \mathbf{i} + \cos \theta_{22} \mathbf{j} + \cos \theta_{23} \mathbf{k} \\ \mathbf{k}' &= \cos \theta_{31} \mathbf{i} + \cos \theta_{32} \mathbf{j} + \cos \theta_{33} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

ცხრა მიმმართველი კოსინუსისგან შემდგარი სიმრავლე x' , y' , z' ღერძების მიმარ-
თულებას x , y , z ღერძებისადმი ამომწურავად განსაზღვრავს. პროცესი შეგვიძლია შევა-
ბრუნოთ ანუ მიმმართველი კოსინუსები \mathbf{i} , \mathbf{j} და \mathbf{k} ერთეულოვანი ვექტორების შტრიხი-
ანი ღერძების გასწვრივ მათი კომპონენტების საშუალებით გამოსახვისთვის შეგვიძლია
გამოვიყენოთ:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} x' &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{i}') = \cos \theta_{11}x + \cos \theta_{12}y + \cos \theta_{13}z \\ y' &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}') = \cos \theta_{21}x + \cos \theta_{22}y + \cos \theta_{23}z \\ z' &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}') = \cos \theta_{31}x + \cos \theta_{32}y + \cos \theta_{33}z \end{aligned} \quad (4.5)$$

ანალოგიური განტოლებები გვექნება \mathbf{i} , \mathbf{j} და \mathbf{k} ერთეულოვანი ვექტორებისთვის.

მიმმართველი კოსინუსები ერთ სისტემაში მდებარე წერტილის კოორდინატებსა და
მეორე სისტემის კოორდინატებს შორის დამოკიდებულებასაც გვატყობინებენ. მაშასა-
დამე, მოცემულ ათვლის სისტემაში წერტილის კოორდინატები სისტემის შტრიხიანი და
არაშტრიხიანი ღერძების გასწვრივ \mathbf{r} მდებარეობის ვექტორის კომპონენტებია. შტრიხი-
ანი კოორდინატები x , y და z -ის საშუალებით მოიცემიან, როგორც ეს 4.5 ფორმულა-
ში ჩანს. ის რაც \mathbf{r} ვექტორის კომპონენტებისთვის გავაკეთეთ, ცხადია შესაძლებელია
გაკეთდეს ნებისმიერი პირობითი ვექტორისთვის. თუ \mathbf{G} რაიმე ვექტორია, მაშინ \mathbf{G} -ის
კომპონენტი x' ღერძის გასწვრივ მის x -, y - და z - კომპონენტებს შემდეგი ფორმულით
უკავშირდება:

$$G_{x'} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{i}' = \cos \theta_{11}G_x + \cos \theta_{12}G_y + \cos \theta_{13}G_z, \quad (4.6)$$

და ა.შ. ცხრა მიმმართველი კოსინუსის სიმრავლე ამ ორ კოორდინატთა სისტემას შორის
გადასვლას ამომწურავად განმარტავს.

თუ შტრიხიანი ღერძები სხეულზე არიან ფიქსირებულნი, მაშინ ცხრა მიმმართველი
კოსინუსი დროის ფუნქცია იქნება, როდესაც სხეული მოძრაობისას ორიენტაციას იცვ-
ლის. მიმმართველი კოსინუსები სხეულის მყისი ორიენტაციის ამსახველ კოორდინატებად

შეგვიძლია განვიხილოთ. სხეულის ორიენტაცია ამ შემთხვევაში სივრცეში ფიქსირებული და სხეულის სისტემის ათვლის სათავის მქონე კოორდინატთა სისტემის მიმართ განისაზღვრება. მიმართველი კოსინუსები, ცხადია, დამოუკიდებელი კოორდინატები არ არიან, ვინაიდან უკვე დავამტკიცეთ, რომ ორიენტაციის განსაზღვრისთვის მხოლოდ სამი კოორდინატია საჭირო.

მიმართველ კოსინუსებს შორის დამოკიდებულების დასადგენად გავიხსენოთ ფაქტი, რომ საბაზისო ვექტორები ორივე კოორდინატთა სისტემაში ერთმანეთისადმი ორთოგონალურებია და მათ ერთის ტოლი მოდულები აქვთ:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1,$$

იგივე დამოკიდებულებები არსებობს \mathbf{i}' , \mathbf{j}' და \mathbf{k}' ვექტორებისთვის. პირობა, რომელსაც ცხრავე კოეფიციენტი აკმაყოფილებს, შეგვიძლია მივიღოთ, თუ 4.7 ფორმულის გამოყენებით \mathbf{i} , \mathbf{j} და \mathbf{k} ვექტორების \mathbf{i}' -ს, \mathbf{j}' -ს და \mathbf{k}' -ს საშუალებით გამომსახველი სამი ფორმულის ყველა სკალარულ ნამრავლს გამოვთვლით:

$$\sum_{i=1}^3 \cos \theta_{im'} \cos \theta_{im} = 0 \quad m \neq m' \quad (4.8)$$

$$\sum_{l=i}^3 \cos^2 \theta_{lm} = 1.$$

სამი განტოლებისგან შემდგარი ეს ორი სიმრავლე საკმარისია, რათა დამოუკიდებელი სიდიდეების რაოდენობა 9-დან 3-მდე შემცირდეს. ექვსი ფორმულა შესაძლებელია ჩაინეროს ერთი ფორმულის სახით, თუ კრონეკერის δ_{lm} სიმბოლოს გამოვიყენებთ:

$$\delta_{lm} = 1 \quad l = m$$

$$= 0 \quad l \neq m.$$

4.8 ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\sum_{l=i}^3 \cos \theta_{lm'} \cos \theta_{lm} = \delta_{m'm}. \quad (4.9)$$

ლაგრანჟის ფუნქციის და მოძრაობის განტოლებების ჩანერა განზოგადებული კოორდინატების სახით ცხრა მიმართველი კოსინუსის არსებობისას შეუძლებელია. ამ მიზნის მისაღწევად მიმართველი კოსინუსების სამი დამოუკიდებელი ფუნქციისგან შემდგარი რაიმე სიმრავლე უნდა გამოვიყენოთ. დამოუკიდებელი ცვლადების ამგვარ სიმრავლეებს მომდევნო პარაგრაფებში შევისწავლით, ხოლო მათგან ყველაზე მნიშვნელოვანი ეილერის კუთხეებია. მიუხედავად ამისა, დეკარტის კოორდინატთა ორ სისტემას შორის დამოკიდებულების დადგენაში მიმართველი კოსინუსების გამოყენებას მნიშვნელოვანი

უპირატესობები აქვს. მიმმართველი კოსინუსების დახმარებით მყარი სხეულის მოძრაობასთან დაკავშირებული თეორემები უფრო მარტივად და განზოგადებულად შეიძლება გამოისახონ, რაც სპეციალური ფარდობითობის თეორიაში და კვანტურ მექანიკაში ფართოდ გამოიყენება.

4.2 ორთოგონალური გარდაქმნები

ცხრა მიმმართველი კოსინუსის თვისებების უკეთ გასაგებად აღნიშვნები შევცვალოთ და ყველა კოორდინატი x -ით აღვნიშნოთ, ხოლო ღერძები შემდეგი ინდექსებით გავარჩიოთ:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x_1 \\ y &\rightarrow x_2 \\ z &\rightarrow x_3 \end{aligned} \tag{4.10}$$

ამგვარი აღნიშვნები 4.3 სურათზე არიან გამოსახულნი. ასევე შევცვალოთ მიმმართველი კოსინუსების აღნიშვნა:

$$a_{ij} = \cos \theta_{ij} \tag{4.11}$$

4.5 და 4.6 ფორმულები x_1, x_2, x_3 კოორდინატა სიმრავლიდან x'_1, x'_2, x'_3 სიმრავლეზე გარდაქმნის ფორმულებია. ისინი **წრფივი** ანუ **ვექტორული** გარდაქმნის მაგალითებია და შემდეგი სახის გარდაქმნის ფორმულებით განისაზღვრებიან:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \tag{4.12}$$

სადაც a_{11}, a_{12}, \dots , და ა.შ. მუდმივი კოეფიციენტების ნებისმიერი სიმრავლეა (x -სა და x' -ისგან დამოუკიდებელი).* გამოსახულებების გამარტივებისთვის შეკრების წესი გამოვიყენოთ, რომელიც პირველად აინშტაინმა შემოგვთავაზა: როდესაც ინდექსი წევრში ორჯერ ან მეტჯერ შედის, წევრები ყოველგვარი შემდგომი სიმბოლოების გარეშე ინდექსის ყველა შესაძლო მნიშვნელობისთვის უნდა შეჯამდეს. მაშასადამე, 4.12 ფორმულა ასე შეიძლება ჩაინეროს:

$$x'_i = a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.12'}$$

j ინდექსის განმეორებითი გამოჩენა ცხადყოფს, რომ 4.12' ფორმულის მარცხენა მხარე j მუნჯი ინდექსის ყველა შესაძლო მნიშვნელობისთვის შესრულებული შეჯამებაა (ამ შემთხვევაში $j = 1, 2, 3$). გარკვეული გაუგებრობა შეიძლება მოხდეს, როდესაც ინდექსირებული სიდიდე ხარისხშია და ქვემოთ მოყვანილი გამოსახულება: $\sum_i x_i^2$

შეკრების წესიდან გამომდინარე ასეთ სახეს იღებს: $x_i x_i$.

სახელმძღვანელოს დარჩენილ ნაწილში შეკრების წესს ავტომატურად ვიყენებთ, თუ სხვა რამ სპეციალურად მითითებული არ არის. გაუგებრობის თავიდან ასაცილებლად შეკრების ნიშანი ცხადად შეიძლება იყოს გამოსახული, კერძოდ მაშინ, როდესაც ინდექსის გარკვეული მნიშვნელობები შეკრებიდან უნდა გამოირიცხონ.

4.11 ფორმულებით წარმოდგენილი გარდაქმნა ზოგადი წრფივი გარდაქმნის (4.12 ფორმულები) კერძო შემთხვევაა, ვინაიდან ყველა მიმართველი კოსინუსი დამოუკიდებელი არ არის. კოეფიციენტებს შორის დამოკიდებულებები (4.8 ფორმულები) ახალი აღნიშვნების შემოტანის შედეგად მივიღეთ. რადგან ორივე კოორდინატა სისტემა დეკარტისაა, ვექტორის მოდული კომპონენტების კვადრატების ჯამია. გარდა ამისა, რეალური ვექტორი უცვლელია და კოორდინატა სისტემის არჩევანს მნიშვნელობა არ აქვს. ვექტორის მოდული ორივე კოორდინატა სისტემაში ერთი და იგივეა. ვექტორის მოდულის მუდმივობა სიმბოლოების საშუალებით ასე შეიძლება ჩაინეროს:

$$x'_i x'_i = x_i x_i. \quad (4.13)$$

4.13 ფორმულის მარცხენა მხარეა:

$$a_{ij} a_{ik} x_j x_k,$$

და 4.13 ფორმულის მარჯვენა მხარეს მხოლოდ მაშინ უთანაბრდება, როდესაც:

$$a_{ij} a_{ik} = 1 \quad j = k \quad (4.14)$$

$$= 0 \quad j \neq k,$$

ან

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (4.15)$$

როდესაც a_{ij} კოეფიციენტები მიმართველი კოსინუსების საშუალებით გამოისახებიან, 4.15 ფორმულაში შესული ექვსი განტოლება 4.9 ფორმულების იდენტური ხდება.

ნებისმიერ წრფივ გარდაქმნას, რომელსაც 4.15 ფორმულისთვის საჭირო თვისებები აქვს, **ორთოგონალური გარდაქმნა** ეწოდება, ხოლო 4.15 ფორმულა **ორთოგონალურობის პირობაა**. მაშასადამე, სივრცეში ფიქსირებული კოორდინატებიდან მყარ სხეულზე ფიქსირებულ კოორდინატებზე გადასვლა ორთოგონალური გარდაქმნის საშუალებით ხდება. გარდაქმნის სიდიდეების (მიმართველი კოსინუსების) მატრიცაა:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

4.16 მატრიცას **გარდაქმნის მატრიცა** ეწოდება და **A** სიმბოლოთი აღინიშნება. a_{ij} სიდიდეები გარდაქმნის **მატრიცის ელემენტებია**.

კონკრეტული მაგალითის სახით სიბრტყეში მოძრაობა განვიხილოთ, როდესაც ბრუნვა ორ განზომილებაში ხდება და გარდაქმნის მატრიცაა:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

მატრიცის ოთხი a_{ij} ელემენტი ერთმანეთს ორთოგონალურობის სამი პირობით უკავშირდება: $a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$, $j, k = 1, 2$,

აქედან გამომდინარე, გარდაქმნის განსაზღვრისთვის მხოლოდ ერთი დამოუკიდებელი პარამეტრია საჭირო. დეკარტის კოორდინატა სისტემიდან სხვა სისტემაზე ორგანომილებიანი გარდაქმნა სიბრტყეში ლერძების ბრუნვას შეესაბამება (იხ. სურ. 4.4), ხოლო ასეთ ბრუნვას მხოლოდ ერთი სიდიდე, კერძოდ ϕ ბრუნვის კუთხე განსაზღვრავს. გარდაქმნის ფორმულები მხოლოდ ამ პარამეტრის საშუალებით გამოვსახოთ და მივიღებთ:

$$x'_1 = x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi$$

$$x'_2 = -x_1 \sin \phi + x_2 \cos \phi$$

$$x'_3 = x_3.$$

მატრიცის ელემენტებია:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \phi & a_{12} &= \sin \phi & a_{13} &= 0 \\ a_{21} &= -\sin \phi & a_{22} &= \cos \phi & a_{23} &= 0 \\ a_{31} &= 0 & a_{32} &= 0 & a_{33} &= 1, \end{aligned} \tag{4.17}$$

მაშასადამე, \mathbf{A} მატრიცაა:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.17'}$$

ორთოგონალურობის სამი პირობაა:

$$a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} = 1$$

$$a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} = 1$$

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0.$$

ამ პირობებს (4.17') მატრიცა ნამდვილად აკმაყოფილებს და 4.17 მატრიცის ელემენტების საშუალებით შემდეგ იგივეობებამდე დაიყვანებიან:

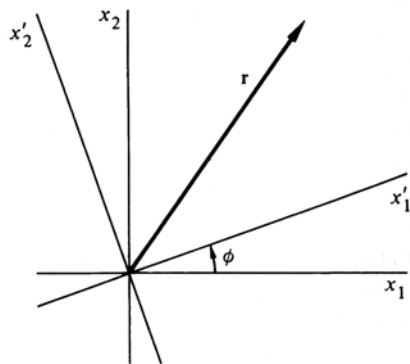
$$\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$$

$$\cos \phi \sin \phi - \sin \phi \cos \phi = 0.$$

A გარდაქმნის მატრიცა **ოპერატორად** შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომელიც არაშტრიხიან სისტემაზე მოქმედებს და მას შტრიხიან სისტემაზე გარდაქმნის. ეს პროცესი სიმბოლურადაც შეგვიძლია გამოვსახოთ: $(\mathbf{r}') = \mathbf{A}\mathbf{r}$, (4.18)

4.18 ფორმულა ასე იკითხება: არაშტრიხიან სისტემაში მდებარე ვექტორის კომპონენტებზე მოქმედი **A** მატრიცა ვექტორის კომპონენტებს შტრიხიან სისტემაში გარდაქმნის. **A** მხოლოდ კოორდინატა სისტემაზე მოქმედებს, ვექტორი უცვლელია და უბრალოდ მისი კომპონენტები ორ სხვადასხვა კოორდინატა სისტემაშია გამოსახული. 4.18 ფორმულაში შემავალი ფრჩხილები ცხადყოფენ, რომ ფორმულის ორივე მხარეს ერთი და იგივე ვექტორია მოცემული და მხოლოდ კომპონენტები იცვლებიან. კოორდინატების გარდაქმნა სამ განზომილებაში ბრუნვაა და **A** მატრიცა სიბრტყეში **ბრუნვის** ოპერატორია.



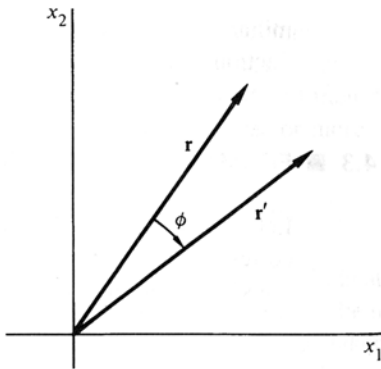
სურ. 4.4. კოორდინატა ღერძების ბრუნვა, როგორც ორგანზომილებიანი ორთოგონალური გარდაქმნის იდენტური

A ასევე შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც **r** ვექტორზე მოქმედი ოპერატორი, რომელიც მას **r'** ვექტორად გარდაქმნის: $\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r}$, (4.19)

ორივე ვექტორი ერთი და იგივე კოორდინატა სისტემაშია გამოსახული. მაშასადამე, კოორდინატა სისტემის ორ განზომილებაში საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით მობრუნების ნაცვლად შეგვიძლია **r** ვექტორი **საათის ისრის მიმართულებით** ϕ კუთხით მოვაბრუნოთ და ახალი **r'** ვექტორი მივიღოთ, როგორც ეს 4.5 სურათზეა ნაჩვენები. ახალი ვექტორის კომპონენტები ძველი ვექტორის კომპონენტებს 4.12 ფორმულებით უკავშირდებიან, რომლებიც კოორდინატა გარდაქმნას ასახავენ. ფორმალური თვალსაზრისით 4.18 ფორმულაში ფრჩხილების გამოყენება აუცილებელი არ არის. 4.18 ფორმულა შეგვიძლია 4.19 ფორმულის სახით ჩავენეროთ და კოორდინატა სისტემაზე ან ვექტორზე მოქმედ ოპერატორად მივიჩნიოთ. ორივე შემთხვევაში ალგებრა უცვლელია.

კოორდინატებზე მოქმედი ოპერატორისეული ინტერპრეტაცია უფრო ლოგიკურია, როდესაც მყარი სხეულის ორიენტაციის განსაზღვრისთვის ორთოგონალურ გარდაქმნას ვიყენებთ. მეორეს მხრივ, ოპერატორის, როგორც ერთი ვექტორის მეორით შემცვლელის

წარმოდგენა უფრო ფართოდაა გავრცელებული. მათემატიკური მსჯელობისას ორივე ინტეგრეტაცია სწორია. \mathbf{A} მატრიცა კოორდინატთა სისტემის ϕ კუთხით და **საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ბრუნვას** ან ვექტორის **საათის ისრის მიმართულებით** ბრუნვას შეესაბამება.



სურ. 4.5. ორთოგონალური გარდაქმნა, როგორც ვექტორის ბრუნვა, როდესაც კოორდინატთა სისტემა უცვლელია.

როლების გაორება ორთოგონალურ გარდაქმნაზე უფრო ზოგადი კოორდინატთა გარდაქმნის სახეობების პირობებშიც ხდება. ზოგჯერ გარდაქმნა მხოლოდ კოორდინატთა სისტემაზე ახდენს ზეგავლენას და რაიმე მოცემული სიდიდე ან ფუნქცია ახალი კოორდინატთა სისტემისთვის გამოისახება. ზოგჯერ გარდაქმნა თავად სიდიდეზე ან ფუნქციაზე იგივე კოორდინატთა სისტემაში მოქმედებს. როდესაც გარდაქმნა მხოლოდ კოორდინატთა სისტემას ეხება, ის **პასიურ როლს** ასრულებს. თუ გარდაქმნა ვექტორს ან რაიმე სხვა ფიზიკურ სიდიდეს ცვლის, მაშინ ის **აქტიურია**. გარდაქმნის ამგვარი ინტეგრეტაციები კლასიკური მექანიკის სხვადასხვა ფორმულებში შეგვხვდებიან და ისინი ფიზიკის მრავალ დარგში გამოიყენებიან.

ფიქსირებული ათვლის სათავის გარშემო მყარი სხეულის მოძრაობის კინემატიკის შემდგომი განხილვისას გარდაქმნის მატრიცაზე ალგებრულ მანიპულაციებს ჩავატარებთ. მომდევნო პარაგრაფში მატრიცული ალგებრის ძირითად ასპექტებს შევისწავლით და კერძოდ ორთოგონალურ მატრიცებს შევხებით. თუ მატრიცული ალგებრა კარგად იცით, მაშინ მომდევნო პარაგრაფი შეგიძლიათ გამოტოვოთ და პირდაპირ 4.4 პარაგრაფზე გადახვიდეთ.

4.3 გარდაქმნის მატრიცის ფორმალური თვისებები

მოდით განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მყარი სხეულის ორი თანმიმდევრობითი გადაადგილებისას ორი თანმიმდევრობითი გარდაქმნა ხდება. \mathbf{r} -დან \mathbf{r}' -ზე პირველი გარდაქმნა \mathbf{B} სიმბოლოთი აღვნიშნოთ: $x'_k = b_{kj}x_j$, (4.20)

\mathbf{r}' -დან \mathbf{r}'' კოორდინატთა მესამე სიმრავლეზე გარდაქმნა \mathbf{A} სიმბოლოთი აღვნიშნოთ:

$$x''_i = a_{ik}x'_k. \quad (4.21)$$

x''_i -სა და x_j -ს შორის დამოკიდებულება 4.20 და 4.21 ფორმულების გაერთიანების შედეგად მიიღება:

$$x''_i = a_{ik}b_{kj}x_j. \quad (4.22)$$

ეს ასეც შეიძლება ჩაინეროს: $x''_i = c_{ij}x_j,$

სადაც $c_{ij} = a_{ik}b_{kj}.$ (4.23)

A და **B** ორთოგონალური გარდაქმნების თანმიმდევრობითი გამოყენება მესამე ნრფივი **C** გარდაქმნის ექვივალენტურია. შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ **C** ორთოგონალური გარდაქმნაა **A**-ს და **B**-ს ორთოგონალობის შედეგად. **C** ოპერატორი **A** და **B** ოპერატორის ნამრავლია: **C = AB**,

c_{ij} მატრიცული ელემენტები კვადრატული მატრიცის ელემენტებია, რომლებიც **A** და **B** კვადრატული მატრიცების გამრავლების შედეგად მიიღებიან.

გაითვალისწინეთ, რომ ეს „მატრიცა“ ანუ გამრავლების ოპერაცია კომუტატიური არ არის: **BA** \neq **AB**, **D = BA** გარდაქმნის ელემენტებია: $d_{ij} = b_{ik}a_{kj},$ (4.24)

ეს ელემენტები, როგორც წესი, **C** მატრიცის ელემენტებს არ ემთხვევიან. მაშასადამე, საბოლოო კოორდინატთა სისტემა **A** და **B** ოპერატორების გამოყენების თანმიმდევრობაზეა დამოკიდებული. გარდა ამისა, მატრიცების გამრავლება ასოციატიურია ანუ სამი ან მეტი მატრიცის ნამრავლში გამრავლების თანმიმდევრობას მნიშვნელობა არ აქვს:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}).$$

4.19 ფორმულაში **A**-ს და **r**-ის შეუღლება **A**-ს კოორდინატთა სისტემაზე (ან ვექტორზე) მოქმედებას ასახავს და ის უბრალოდ სიმბოლურ ხასიათს ატარებს. თუ მატრიცების ცნებას განვავრცობთ, მაშინ ასეთი შეუღლება მატრიცების რეალურ გამრავლებასაც ასახავს. აქამდე ჩვენს მიერ გამოყენებული მატრიცები კვადრატულები იყვნენ ანუ მათი სვეტების და სტრიქონების რაოდენობა თანაბარი იყო, თუმცა შესაძლებელია ერთსვეტიანი მატრიცებიც შეგვხვდეს:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Ax ნამრავლი ერთსვეტიანი მატრიცაა და მისი ელემენტებია: $(\mathbf{Ax})_i = a_{ij}x_j = x'_i.$

მაშასადამე, 4.19 ფორმულა მატრიცული განტოლების სახით შეიძლება ჩაინეროს:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}.$$

მატრიცების შეკრება გამრავლების მსგავსად მნიშვნელოვანი არ არის, მაგრამ ხშირ-

ად გამოიყენება. $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ჯამი \mathbf{C} მატრიცაა, რომლის ელემენტები \mathbf{A} და \mathbf{B} მატრიცების შესაბამისი ელემენტების ჯამია: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

დიდად მნიშვნელოვანია ი \mathbf{A} -ს შებრუნებულ გარდაქმნა ანუ r' -დან r -ზე დაბრუნება. ამგვარ გარდაქმნას \mathbf{A}^{-1} ეწოდება და მისი მატრიცული ელემენტები a'_{ij} სიმბოლოთი აღინიშნებიან. ამ შემთხვევაში განტოლებათა შემდეგი სიმრავლე გვაქვს:

$$x_i = a'_{ij}x'_j, \quad (4.27)$$

რაც შესაბამისობაში უნდა იყოს შემდეგ პირობასთან:

$$x'_k = a_{ki}x_i. \quad (4.28)$$

x_i 4.27 ფორმულიდან ავიღოთ და 4.28 ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$x'_k = a_{ki}a'_{ij}x'_j. \quad (4.29)$$

ვინაიდან r' -ის კომპონენტები დამოუკიდებლებია, 4.29 ფორმულა მხოლოდ მაშინ არის სწორი, როდესაც შეკრება ცალსახად დაიყვანება x'_k -ზე. ამიტომ x'_j -ს კოეფიციენტი ერთის ტოლი უნდა იყოს, როდესაც $j = k$ და 0-ის ტოლი უნდა იყოს, როდესაც $j \neq k$:

$$a_{ki}a'_{ij} = \delta_{kj}. \quad (4.30)$$

4.30 ფორმულის მარცხენა მხარე $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$ ნამრავლის მატრიცული ელემენტია, ხოლო მარჯვენა მხარე $\mathbf{1}$ ერთეულოვანი მატრიცის ელემენტია:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

4.30 ფორმულა ასეც შეიძლება ჩაინეროს:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}, \quad (4.32)$$

სწორედ ამიტომ აღვნიშნეთ შებრუნებული მატრიცა \mathbf{A}^{-1} სიმბოლოთი. $\mathbf{1}$ -ის შესაბამის გარდაქმნას **იგივერი გარდაქმნა** ეწოდება და ამ დროს კოორდინატთა სისტემაში ცვლილება არ ხდება: $\mathbf{x} = \mathbf{1}\mathbf{x}$.

თუ \mathbf{A} მატრიცას $\mathbf{1}$ -ზე ნებისმიერი თანმიმდევრობით გავამრავლებთ, \mathbf{A} არ შეიცვლება: $\mathbf{1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{A}$.

თუ 4.28 ფორმულის დამტკიცების თანმიმდევრობას ოდნავ შევცვლით, გამოჩნდება, რომ \mathbf{A} და \mathbf{A}^{-1} კომუტირებენ. 4.29 ფორმულაში x_i -ის x'_j -თ გამოსახვის ნაცვლად ორი ფორმულიდან x'_j გამოვრიცხოთ და მივიღებთ: $a'_{ij}a_{jk} = \delta_{ik}$.

მატრიცული აღნიშვნით:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}, \quad (4.33)$$

ამჯერად ორმაგი ჯამი განვიხილოთ:

$$a_{ki}a_{ki}'_{ij},$$

ეს ასეც შეიძლება ჩაინეროს: $c_{ii}a'_{ij}$ როდესაც $c_{ii} = a_{ki}a_{ki}$ და ასეც: $a_{ki}d_{kj}$ როდესაც $d_{kj} = a_{ki}a'_{ij}$.

ორთოგონალურობის პირობების (4.15 ფორმულა) გამოყენებით პირველი ფორმით ჩანერილი ჯამი ასეთ სახეს მიიღებს: $\delta_{ii}a'_{ij} = a'_{ij}$.

მეორე ფორმითასეთ ჩანერილი ჯამი 4.30 ფორმულის დახმარებით შემდეგ სახეს მიიღებს: $a_{ki}\delta_{kj} = a_{ji}$.

მაშასადამე, \mathbf{A} პირდაპირი მატრიცის \mathbf{A}^{-1} შებრუნებული მატრიცის ელემენტებს შორის შემდეგი დამოკიდებულებაა: $a'_{ij} = a_{ji}$. (4.34)

სვეტების და მწკრივების გადანაცვლების შედეგად \mathbf{A}^{-1} -დან მიღებულ მატრიცას **ტრანსპონირებული** ეწოდება და $\tilde{\mathbf{A}}$ სიმბოლოთი აღინიშნება. 4.34 ფორმულის თანახმად, **ორთოგონალური მატრიცების** შემთხვევაში შებრუნებული მატრიცა ტრანსპონირებულია: $\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}$. (4.35)

თუ ამ შედეგს 4.33 ფორმულაში ჩავსვამთ, მივიღებთ:

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{1}, \quad (4.36)$$

4.36 ფორმულა ორთოგონალურობის პირობების იდენტურია და ამის შემომწმება 4.15 ფორმულის გაშლის შედეგად შეიძლება. ორთოგონალურობის პირობების ალტერნატიული ფორმა 4.30 ფორმულიდან შეგვიძლია მივიღოთ, თუ მასში 4.34 ფორმულას ჩავსვამთ:

$$a_{ki}a_{ji} = \delta_{kj}. \quad (4.37)$$

4.37 ფორმულა სიმბოლოებით ასე ჩაინერება: $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{1}$

4.37 ფორმულა პირდაპირ 4.36 ფორმულიდან მიიღება, თუ 4.36 ფორმულას მარცხნიდან \mathbf{A} -ზე გავამრავლებთ, ხოლო მარჯვნიდან \mathbf{A}^{-1} -ზე გავამრავლებთ.

მართკუთხა მატრიცა $m \times n$ განზომილებისაა, თუ ის m რაოდენობის სტრიქონისა და n რაოდენობის სვეტისგან შედგება. თუ მატრიცის ელემენტია a_{ij} , მაშინ i 1-დან m -მდე იცვლება, ხოლო j - 1-დან n -მდე. ამგვარი მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა $n \times m$ განზომილების იქნება. თუ ვექტორული ერთსვეტიანი მატრიცა $m \times 1$ განზომილების მართკუთხა მატრიცაა, მაშინ ამ ვექტორის შესაბამისი ტრანსპონირებული ვექტორი $1 \times m$ განზომილების ანუ ერთსტრიქონიანი მატრიცაა. ორი მართკუთხა მატრიცის $\mathbf{A}\mathbf{B}$ ნამრავლი მხოლოდ მაშინ არსებობს, როდესაც \mathbf{A} მატრიცის სვეტების რაოდენობა \mathbf{B} მატრიცის სტრიქონების რაოდენობის ტოლია. სწორედ ასეთი შედეგი მოსდევს მატრიცის ელემენტის მომცემი გამრავლების ოპერაციის განსაზღვრებას: $c_{ij} = a_{ik}b_{kj}$.

ერთსვეტიანი მატრიცის კვადრატულ მატრიცაზე ნამრავლი არ არსებობს. სამაგიეროდ შესაძლებელია კვადრატული მატრიცის ერთსვეტიან მატრიცაზე გამრავლება, მაგრამ გაითვალისწინეთ, რომ ერთსტრიქონიანი მატრიცა კვადრატულ მატრიცაზე შესაძლებელია გამრავლდეს. ვექტორის შემთხვევაში ერთსვეტიან მატრიცასა და მის ტრან-

სპონირებულს შორის ხშირად განსხვავება არ არის. აქედან გამომდინარე, \mathbf{x} სიმბოლო ერთსვეტიანი ან ერთსტრიქონიანი მატრიცის აღნიშნისთვის გამოიყენება*. მაშასადამე, \mathbf{Ax} გამოსახულებაში \mathbf{A} კვადრატული მატრიცაა, ხოლო \mathbf{x} სიმბოლო ერთსვეტიან მატრიცას აღნიშნავს. \mathbf{xA} გამოსახულება ერთ სტრიქონში განლაგებულ იგივე ელემენტებს ასახავს. ყურადღება მიაქციეთ, რომ \mathbf{Ax} -ის i რიგის კომპონენტი ასე შეიძლება ჩაინეროს: $A_{ij}x_j = x_j(\tilde{\mathbf{A}})_{ji}$.

მაშასადამე, ვექტორის და კვადრატული მატრიცის ნამრავლის კომუტატიური თვისება მივიღეთ:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{x}\tilde{\mathbf{A}}.$$

როდესაც კვადრატული მატრიცა მისი ტრანსპონირებული მატრიცის ექვივალენტურია, მას **სიმეტრიული** ეწოდება: $A_{ij} = A_{ji}$, (4.38)

როდესაც ტრანსპონირებული მატრიცა სანყისი მატრიცის უარყოფითია, მაშინ მატრიცას **ანტისიმეტრიული** ანუ **ნიშანცვლადი** ეწოდება: $A_{ij} = -A_{ji}$, (4.39)

ანტისიმეტრიულ მატრიცაში დიაგონალური ელემენტები ყოველთვის ნულებია.

ოპერატორის ორივე ინტერპრეტაცია, როგორც ვექტორის და კოორდინატა სისტემის გარდაქმნა, მაშინ გამოიყენება, როდესაც ოპერატორის გარდაქმნას კოორდინატების ცვლილების პირობებში ვპოულობთ. დავუშვათ, \mathbf{A} იყოს \mathbf{F} ვექტორზე (ერთსვეტიანი მატრიცავ) მოქმედი ოპერატორი, რომელიც \mathbf{G} ვექტორს წარმოქმნის: $\mathbf{G} = \mathbf{AF}$.

თუ \mathbf{B} მატრიცა კოორდინატა სისტემას გარდაქმნის, \mathbf{G} ვექტორის კომპონენტები ახალ სისტემაში იქნებიან:

$$\mathbf{BG} = \mathbf{BAF}, \quad \text{ან} \quad \mathbf{BG} = \mathbf{BAB}^{-1}\mathbf{BF}. \quad (4.40)$$

4.40 ფორმულა ასე იკითხება: ახალ სისტემაში გამოსახულ \mathbf{F} ვექტორზე მოქმედი \mathbf{BAB}^{-1} ოპერატორი იმავე სისტემაში \mathbf{G} ვექტორს წარმოქმნის, რომელიც ახალი კოორდინატებით არის გამოსახული. მაშასადამე, \mathbf{BAB}^{-1} არის \mathbf{A} ოპერატორის მიერ მიღებული ფორმა, როდესაც ღერძების ახალ სიმრავლეზე მოხდა გადასვლა:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{BAB}^{-1}. \quad (4.41)$$

4.41 ფორმის მქონე ნებისმიერი მატრიცის გარდაქმნას **მსგავსების გარდაქმნა** ეწოდება.

მოდით კვადრატული მატრიცის ელემენტებიდან მიღებული დეტერმინანტის თვისებები განვიხილოთ. ამგვარ დეტერმინანტს ვერტიკალური ხაზებით აღნიშნავენ: $|\mathbf{A}|$. მატრიცების გამრავლების განსაზღვრება დეტერმინანტების გამრავლების განსაზღვრების იდენტურია:

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|. \quad (4.41')$$

ერთეულოვანი მატრიცის დეტერმინანტია 1 და ორთოგონალურობის პირობები დეტერმინანტული ფორმით ასე შეიძლება ჩაინეროს: $|\tilde{\mathbf{A}}| \cdot |\mathbf{A}| = 1$.

დეტერმინანტის მნიშვნელობაზე სვეტების და სტრიქონების შეცვლა გავლენას არ

ახდენს და შეგვიძლია დავწეროთ: $|\mathbf{A}|^2 = 1$, (4.42)

4.42 ფორმულა ნიშნავს, რომ ორთოგონალური მატრიცის დეტერმინანტი მხოლოდ +1 ან -1 შეიძლება იყოს (ამ რიცხვების გეომეტრიულ მნიშვნელობებს შემდეგ პარაგრაფში განვიხილავთ)

როდესაც მატრიცა ორთოგონალური არ არის, დეტერმინანტს ასეთი მარტივი მნიშვნელობები აღარ აქვს. მიუხედავად ამისა, შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ დეტერმინანტის მნიშვნელობა მსგავსების გარდაქმნის დროს უცვლელია. გარდაქმნილი მატრიცის 4.41 ფორმულის მარჯვენა მხარე \mathbf{B} -ზე გავამრავლოთ და მივიღებთ: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$,

დეტერმინანტებში: $|\mathbf{A}'| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{A}|$.

ვინაიდან \mathbf{B} -ს დეტერმინანტი რიცხვია და ნულის ტოლი არ არის*, ფორმულის ორივე მხარე $|\mathbf{B}|$ -ზე გავყოთ და სასურველ შედეგს მივიღებთ: $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$.

მყარი სხეულის მოძრაობის შემდგომი შესწავლისას მატრიცული გარდაქმნების, განსაკუთრებით კი ორთოგონალური მატრიცების გარდაქმნების თვისებებს გამოვიყენებთ.

4.4 ეილერის კუთხეები

ცხრა a_{ij} ელემენტი განზოგადებულ კოორდინატებად არ გამოდგება, ვინაიდან ისინი დამოუკიდებელი სიდიდეები არ არიან. ორთოგონალურობის პირობების ამსახველი ექვსი ფორმულა (4.9 ან 4.15) დამოუკიდებელი ელემენტების რაოდენობას სამამდე ამცირებს. მყარი სხეულის მოძრაობის აღწერისთვის მატრიცის ელემენტები დამატებით პირობებსაც უნდა აკმაყოფილებდნენ. წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ, რომ რეალური ორთოგონალური მატრიცის დეტერმინანტს +1 ან -1 მნიშვნელობა შეიძლება ჰქონდეს. ქვემოთ მოყვანილი არგუმენტიდან კი ცხადია, რომ -1 დეტერმინანტი მყარი სხეულის ფიზიკურ გადაადგილებას ვერ ასახავს.

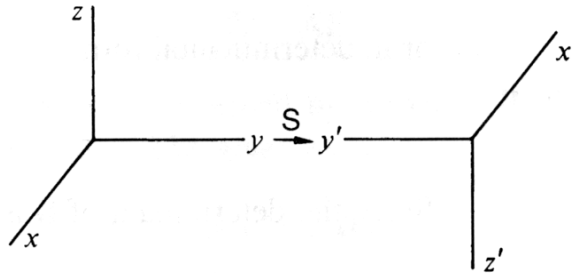
განვიხილოთ უმარტივესი, 3×3 განზომილების მატრიცა, რომლის დეტერმინანტია -1:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbf{1}.$$

\mathbf{S} გარდაქმნა კოორდინატა ღერძების ან თითოეული კომპონენტის ნიშანს ცვლის (იხ. სურ. 4.6). ამგვარი ოპერაციის შედეგად მარჯვენა კოორდინატა სისტემა მარცხნაში გადადის და ოპერაციას კოორდინატა ღერძების **ინვერსია** ეწოდება.

ინვერსიის განხორციელების ერთ-ერთი მეთოდი კოორდინატა ღერძის გარშემო 180° -ით შემობრუნება და შემდეგ კოორდინატა ღერძის მიმართულებით არეკვლაა. Z ღერძისთვის გვექნება:

(z-ის გარშემო 180°-ით შემობრუნება) (x y სიბრტყეში არეკვლა)=ინვერსია



სურ. 4.6. კოორდინატთა ღერძების ინვერსია

მატრიცული აღნიშვნის შემთხვევაში გვექნება:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

180°-ით შემობრუნება 4.17 ფორმულაში $\phi = 180^\circ$ ჩასმით მიიღება.

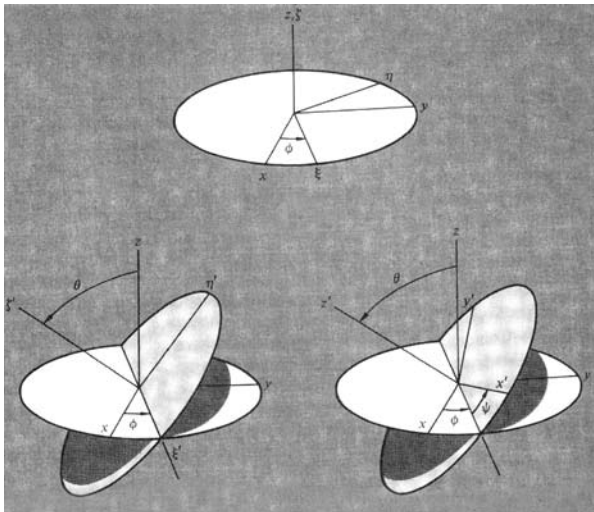
ოპერაციის ბუნებიდან გამომდინარე, მარჯვენა სისტემის მარცხენა სისტემაზე ინვერსია კოორდინატთა ღერძების ორიენტაციის **მყარი** ცვლილების შედეგად შეუძლებელია. აქედან გამომდინარე, ინვერსია მყარი სხეულის ფიზიკურ გადაადგილებას არასდროს არ შეესაბამება. **S** ინვერსიისთვის სწორი დებულება -1 დეტერმინანტის მქონე მატრიცისთვისაც სწორია, ვინაიდან ამგვარი მატრიცა **S**-ის და +1 დეტერმინანტის მქონე მატრიცის ნამრაველია და ინვერსიის ოპერაციას შეიცავს. ინვერსია ორიენტაციის მყარ ცვლილებას ვერ ასახავს და აქედან გამომდინარე, მყარი სხეულის მოძრაობის ამსახველი გარდაქმნები +1 დეტერმინანტის მქონე მატრიცებით შემოიფარგლებიან. იგივე დასკვნას მივიღებთ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ გარდაქმნის მატრიცა +1 დეტერმინანტის მქონე ერთეულვანი მატრიციდან უწყვეტი ცვლილებით მიიღება. მოძრაობის უწყვეტობიდან გამომდინარე, შეუძლებელია მატრიცის დეტერმინანტი რაიმე დროში +1-დან -1-მდე შეიცვალოს. +1 დეტერმინანტის მქონე ორთოგონალურ გარდაქმნებს **საკუთრივი** ეწოდებათ, ხოლო -1 დეტერმინანტის მქონე გარდაქმნებს **არასაკუთრივებს** უწოდებენ.

მყარი სხეულების მოძრაობის მექანიკის ლაგრანჟისული ფორმულირებით აღწერისთვის მყარი სხეულის ორიენტაციის განმსაზღვრელი სამი დამოუკიდებელი პარამეტრის მოძებნაა საჭირო, როდესაც გარდაქმნის შესაბამისი ორთოგონალური მატრიცის დეტერმინანტია +1. ამგვარი განზოგადებული კოორდინატების დადგენის შემდეგ

სისტემისთვის ლაგრანჟის ფუნქცია დაინერება და მოძრაობის ლაგრანჟისეულ განტოლებებს მივიღებთ. ასეთი პარამეტრების სიმრავლე ლიტერატურაში საკმარისად არის აღწერილი, მაგრამ ყველაზე გავრცელებული და მოსახერხებელი **ვილერის კუთხეებია**. მოგვიანებით ამ კუთხეებს განვსაზღვრავთ და იმასაც ვნახავთ, თუ როგორ შეიძლება გარდაქმნის ორთოგონალური მატრიცის ელემენტების მათი საშუალებით გამოსახვა.

დეკარტის კოორდინატთა სისტემიდან სხვა სისტემაზე გარდაქმნა გარკვეული თანმიმდევრობით შესრულებული სამი ბრუნვის შედეგად არის შესაძლებელი. ვილერის კუთხეები ბრუნვების კუთხეებია. ბრუნვის კუთხეების არჩევა გარკვეულ საზღვრებში პირობითია. ქვემოთ მოყვანილი დაშვება ციური სხეულების მექანიკაში, გამოყენებით მექანიკაში და მოლეკულურ ფიზიკაში ხშირად გამოიყენება. სხვა დაშვებებს მოგვიანებით და დამატებაში აღვწერთ.

თავდაპირველად ღერძების სანყისი xyz სისტემა z ღერძის გარშემო საათის ისრის სანინალმდეგო მიმართულებით ϕ კუთხით შევაბრუნოთ და მიღებული კოორდინატთა სისტემა $\xi\eta\zeta$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. შემდეგ შუალედური $\xi\eta\zeta$ ღერძების სისტემა ξ ღერძის გარშემო საათის ისრის სანინალმდეგო მიმართულებით θ კუთხით შევაბრუნოთ და მიღებული შუალედური სისტემა $\xi'\eta'\zeta'$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. ξ' ღერძი xy და $\xi'\eta'$ სიბრტყეების კვეთის ადგილზე მდებარეობს და მას **კვანძების ხაზი** ეწოდება. საბოლოოდ, $\xi'\eta'\zeta'$ ღერძები ζ' ღერძის გარშემო საათის ისრის სანინალმდეგო მიმართულებით ψ კუთხით შევაბრუნოთ და ღერძების $x'y'z'$ სისტემას მივიღებთ. 4.7 სურათზე ნაჩვენებია ამ ოპერაციის სხვადასხვა ეტაპები. ვილერის θ , ϕ და ψ კუთხეები $x'y'z'$ სისტემის მიმართულებას xyz -ისადმი განსაზღვრავენ და მაშასადამე სამ განზოგადებულ კოორდინატად შეგვიძლია გამოვიყენოთ.*



სურ. 4.7. ვილერის კუთხეების განმსაზღვრელი ბრუნვები

სრული **A** გარდაქმნის ელემენტების მისაღებად სამი ცალკეული ბრუნვა მარტივი მატრიცის სახით წარმოვადგინოთ და შემდეგ მათი გარავლების შედეგად მიღებული მატრიცა ჩავწეროთ. z ღერძის გარშემო სანყის ბრუნვას **D** მატრიცა ასახავს:

$$\xi = Dx,$$

სადაც ξ და \mathbf{x} ერთსვეტიანი მატრიცებია. $\xi\eta\zeta$ -დან $\xi'\eta'\zeta'$ -ზე გარდაქმნას \mathbf{C} მატრიცა ასახავს: $\xi' = \mathbf{C}\xi$,

ხოლო უკანასკნელ ბრუნვას \mathbf{B} მატრიცა ასახავს: $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\xi'$.

სრული გარდაქმნის მატრიცაა: $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, ანუ $\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$.

\mathbf{D} გარდაქმნა ζ ღერძის გარშემო ბრუნვაა და ამიტომ მისი მატრიცული ფორმაა:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

\mathbf{C} გარდაქმნა ξ ღერძის გარშემო ბრუნვას შეესაბამება და მისი მატრიცული ფორმაა:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

\mathbf{B} გარდაქმნა ζ' ღერძის გარშემო ბრუნვაა და ამიტომ \mathbf{D} -ს მსგავსი ფორმა აქვს:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

$\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$ მატრიცაა:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

სხეულის კოორდინატებიდან სივრცით ღერძებზე შებრუნებული გარდაქმნაა:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}'$$

ეს გარდაქმნა $\tilde{\mathbf{A}}$ ტრანსპონირებული მატრიცით გამოისახება:

$$\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & -\sin\psi\sin\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & \sin\theta\sin\psi \\ \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & -\sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

გამრავლების, **A**-ს საკუთრივობის და ორთოგონალურობის შემონახვა სავარჯიშოებს მივანდოთ.

კოორდინატთა სისტემის საბოლოო მიმართულების განსაზღვრისთვის გამოყენებული ბრუნვები გარკვეულწილად პირობითებია. საწყისი ბრუნვა დეკარტის ნებისმიერი ღერძის გარშემო შეიძლება მოხდეს. შემდგომ ორ ბრუნვას მხოლოდ ის შეზღუდვა ახასიათებს, რომ ორივე მათგანი ერთი და იგივე ღერძის გარშემო არ უნდა მოხდეს. აქედან გამომდინარე, ეილერის კუთხეების განსაზღვრისთვის 12 წესის მიღება შესაძლებელია (მარჯვენა კოორდინატთა სისტემაში). ორ ყველაზე ხშირად გამოყენებულ წესს მხოლოდ მეორე ბრუნვისთვის ღერძის არჩევანი განასხვავებს. ეილერის კუთხეების განსაზღვრებაში მეორე ბრუნვა x შუალედური ღერძის გარშემო ხდება. ამგვარ არჩევანს x -წესს ვუწოდებთ. კვანტურ მექანიკაში, ბირთვულ და ნაწილაკების ფიზიკაში მეორე ბრუნვა ხშირად y შუალედური ღერძის გარშემო ხდება და ასეთ დროს y -წესს ვიყენებთ.

მესამე წესი თვითმფრინავების და თანამგზავრების მოძრაობის მიმართულებასთან არის კავშირში და საინჟინრო მიზნებისთვის გამოიყენება. x - და y -წესების გამოყენებისას შტრიხიანი და არაშტრიხიანი სისტემები მხოლოდ ოდნავ განსხვავდებიან ერთმანეთისგან, ϕ და ψ კუთხეების ერთმანეთისგან გარჩევა შეუძლებელია, ვინაიდან მათი z და z' ბრუნვის ღერძები თითქმის ერთმანეთს ემთხვევიან. ამ პრობლემის გადაჭრისთვის სამივე ბრუნვას სხვადასხვა ღერძების გარშემო ატარებენ. პირველი ბრუნვა ვერტიკალური ღერძის გარშემო ხდება და **განივი მიმართულებით დახრილობის კუთხეს** გვაძლევს. მეორე ბრუნვა მოძრავ საგანზე ფიქსირებული, პერპენდიკულარული და სიმეტრიის ღერძისადმი ნორმალური ღერძის გარშემო ხდება და **მდებარეობის კუთხით** იზომება. მესამე კუთხე საგნის სიმეტრიის ღერძის გარშემო ბრუნვის შედეგად მიიღება და მას **დაგვერდების კუთხე** ეწოდება. ვინაიდან ბრუნვა სამივე ღერძის გარშემო ხდება, აღწერილ წესს xyz -წესი ეწოდება, ხოლო კუთხეებს **ტიტ-ბრაიანის კუთხეებს** უწოდებენ.

4.5 კელი-კლაინის პარამეტრები და მათთან დაკავშირებული სიდიდეები

მყარი სხეულის მიმართულების განსაზღვრისთვის მხოლოდ სამი დამოუკიდებელი სიდიდეა საჭირო. მიუხედავად ამისა, არსებობს შემთხვევები, როდესაც ბრუნვის აღწერისთვის სიდიდეების მინიმალურ რაოდენობაზე მეტის შემცველი ცვლადების სიმრავლის გამოყენებაა სასურველი, რომელთა გამოყენება განზოგადებულ კოორდინატებად შეუძლებელია. ფელიქს კლაინმა ოთხი პარამეტრისგან შემდგარი სიმრავლე შემოიტანა, რათა რთული გიროსკოპიული ამოცანების ინტეგრება გაეადვილებინა. რიცხვითი გამოთვლებისას ეილერის კუთხეების გამოყენება საკმაოდ მოუხერხებელია, ვინაიდან ტრიგონომეტრიული ფუნქციების დიდი რაოდენობა გვჭირდება. ოთხი პარამეტრით მანიპული-

რება კი კომპიუტერისთვისაც ადვილია. გარდა ამისა, ოთხი პარამეტრისგან შემდგარი სიმრავლეები ფიზიკის სხვა დარგებშიც თეორიულ დაინტერესებას იწვევენ, როდესაც ბრუნვასთან ან ბრუნვით სიმეტრიასთან გვაქვს შეხება. ამ პარამეტრებს მოკლედ აღვწერთ, ხოლო დეტალებს \mathbf{A} დამატებაში გავეცნობით.

კელი-კლაინის პარამეტრები α , β , γ და δ სიმბოლოებით აღნიშნული კომპლექსური რიცხვებია, რომლებიც $\beta = -\gamma^*$ და $\delta = \alpha^*$ შეზღუდვებს ექვემდებარებიან. ამ რიცხვების საშუალებით მბრუნავი სხეულის გარდაქმნის მატრიცა ასე ჩაიწერება:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 + \delta^2 - \beta^2) & \frac{i}{2}(\gamma^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2) & \gamma\delta - \alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2) & -i(\alpha\beta + \gamma\delta) \\ \beta\delta - \alpha\gamma & i(\alpha\gamma + \beta\delta) & \alpha\delta + \beta\gamma \end{bmatrix}.$$

\mathbf{A} მატრიცა ნამდვილია, ვინაიდან თუ ჩავწერთ: $\alpha = e_0 + ie_3$
 $\beta = e_2 + ie_1,$

სადაც e_0, e_1, e_2 და e_3 ნამდვილი სიდიდეები კელი-კლაინის პარამეტრებია, მაგრამ მათ უფრო ზუსტად **ელერის პარამეტრები** ეწოდებათ. პარამეტრები შემდეგ პირობას აკმაყოფილებენ: $e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$.

აღგებრული გარდაქმნების შედეგად გამოჩნდება, რომ \mathbf{A} მატრიცა ოთხი ნამდვილი პარამეტრის საშუალებით შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 + e_0e_2) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix}. \quad (4.47')$$

მატრიცის ელემენტების ნამდვილობა უტყუარი ფაქტია. ამ პარამეტრებით გამოსახული \mathbf{A} მატრიცა \mathbf{S} ინვერსის გარდაქმნის ფორმას ვერ მიიღებს. არადიაგონალური ელემენტები და მათი ტრანსპონირებულები ნულდებიან, თუ სულ მცირე სამი პარამეტრი ნულის ტოლია. დარჩენილ არანულოვან პარამეტრს ისე ვერ შევარჩევთ, რომ სამივე დიაგონალური ელემენტი (ან მხოლოდ ერთი მათგანი) -1-ის ტოლი იყოს.

4.6 ელერის თეორემა მყარი სხეულის მოძრაობის შესახებ

წინა პარაგრაფებში მოყვანილი ინფორმაცია მყარი სხეულების მოძრაობის აღწერისთვის საკმარის მათემატიკურ მეთოდებს გვანვდის. მყარი სხეულის ორიენტაცია ნებისმიერ მომენტში ორთოგონალური გარდაქმნის მიხედვით განისაზღვრება, რომლის

ელემენტები პარამეტრების რაიმე შესაბამისი სიმრავლით შეიძლება გამოისახონ. ორიენტაცია დროში იცვლება, გარდაქმნის მატრიცა დროის ფუნქციაა და $\mathbf{A}(t)$ ფორმით შეიძლება ჩაინეროს. თუ სხეულის ღერძები $t = 0$ დროს სივრცით ღერძებს ემთხვევიან, მაშინ საწყისი გარდაქმნა იგივეურია: $\mathbf{A}(0) = \mathbf{1}$.

მოგვიანებით $\mathbf{A}(t)$ იგივეური გარდაქმნისგან განსხვავებულია, მაგრამ რადგან ფიზიკური მოძრაობა უწყვეტია, $\mathbf{A}(t)$ დროის უწყვეტი ფუნქციაა. ამგვარად შეიძლება ითქვას, რომ ეს გარდაქმნა მიიღება **იგივეური გარდაქმნიდან უწყვეტი ევოლუციის გზით**.

მოძრაობის აღწერის ასეთი მეთოდის და უკვე განხილული მათემატიკური პროცედურების გამოყენების შედეგად მყარი სხეულის მოძრაობის მნიშვნელოვან თვისებას ვიღებთ.

ეილერის თეორემა: ერთი ფიქსირებული წერტილის მქონე მყარი სხეულის ზოგადი გადაადგილება რაიმე ღერძის გარშემო ბრუნვაა.

ეილერის თეორემის თანახმად, ყოველი ასეთი ბრუნვისთვის შესაძლებელია ამ ფიქსირებულ წერტილზე გამავალი და გარკვეული θ და ϕ პოლარული კუთხეებით მიმართული ისეთი ღერძის პოვნა, რომ სხეულის ზოგადი ბრუნვა ამ ღერძის გარშემო გარკვეული ψ კუთხით ბრუნვას ემთხვევა. ასევე ყოველთვის შესაძლებელია იგივე ბრუნვის ამსახველი ეილერის სამი კუთხის პოვნა.

თუ ფიქსირებული წერტილი (აუცილებელი არ არის საგნის მასათა ცენტრი იყოს) სხეულის ღერძთა სიმრავლის ათვლის სათავეა, მაშინ მყარი სხეულის გადაადგილება სხეულის ღერძების გადატანით მოძრაობას კი არ მოიცავს, არამედ ორიენტაციის ცვლილებას. ეილერის თეორემის თანახმად, სხეულის ღერძთა სიმრავლე დროის ნებისმიერი t მომენტისთვის ღერძების საწყისი სიმრავლის ერთხელ მობრუნების შედეგად შეგვიძლია მივიღოთ. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მყარი სხეულის მოძრაობის ამსახველ \mathbf{A} მატრიცაში ჩადებული მოქმედება **ბრუნვაა**. ბრუნვის თვისებიდან გამომდინარე, ოპერაციის შედეგად ერთი მიმართულება, კერძოდ ბრუნვის ღერძი არ იცვლება. მაშასადამე, ბრუნვის ღერძის გასწვრივ გავლებულ ნებისმიერ ვექტორს საწყის და საბოლოო ღერძებშიც ერთი და იგივე კომპონენტები ექნება.

ბრუნვის კიდევ ერთი აუცილებელი თვისება, რომლის თანახმადაც ვექტორების მოდულები არ უნდა შეიცვალოს, ავტომატურად არის უზრუნველყოფილი ორთოგონალურობის პირობებით. ეილერის თეორემა დამტკიცდება თუ ვაჩვენებთ, რომ არსებობს ისეთი \mathbf{R} ვექტორი, რომელსაც ორივე სისტემაში ერთი და იგივე კომპონენტები აქვს. ვექტორის მატრიცული ჩანაწერის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{AR} = \mathbf{R}. \tag{4.48}$$

4.48 ფორმულა უფრო ზოგადი განტოლების კერძო შემთხვევაა:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{AR} = \lambda \mathbf{R}, \tag{4.49}$$

სადაც λ რაიმე მუდმივაა, რომელიც შესაძლებელია კომპლექსური იყოს. λ -ს მნიშვნელობებს, როდესაც ეს განტოლება იხსნება, მატრიცის მახასიათებელი ანუ **საკუთრივი მნიშვნელობები** ეწოდებათ. ვინაიდან 4.49 ფორმის განტოლებები უფრო ზოგადებია და მათ მე-6 პარაგრაფშიც გამოვიყენებთ, ჯერ სწორედ ამ განტოლებებს განვიხილავთ და შემდეგ გადავალთ 4.48 განტოლებებზე.

4.49 განტოლების დამაკმაყოფილებელი ვექტორების პოვნის ამოცანას მოცემული მატრიცის **საკუთრივი მნიშვნელობების** ამოცანა ეწოდება, ხოლო 4.49 განტოლებას **საკუთრივი მნიშვნელობების განტოლებას** უწოდებენ. შესაბამისად, ვექტორული ამონახსნები **A**-ს **საკუთრივი ვექტორებია**. ეილერის თეორემა ასე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ:

ნამდვილ ორთოგონალურ მატრიცას, რომელიც ერთი ფიქსირებული წერტილის მქონე მყარი სხეულის ფიზიკურ მოძრაობას ასახავს, ყოველთვის გააჩნია +1 საკუთრივი მნიშვნელობა.

საკუთრივი მნიშვნელობების 4.49 ფორმულა ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1})\mathbf{R} = 0, \quad (4.50)$$

თუ ამ ფორმულას გავშლით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)X + a_{12}Y + a_{13}Z &= 0 \\ a_{21}X + (a_{22} - \lambda)Y + a_{23}Z &= 0 \\ a_{31}X + a_{32}Y + (a_{33} - \lambda)Z &= 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

4.51 ფორმულა სამი ერთგვაროვანი განტოლებისგან შემდგარი სიმრავლეა, რომელიც **R** საკუთრივი ვექტორის X , Y და Z კომპონენტებისთვის არის განკუთვნილი. ეს განტოლებები სამი კომპონენტის განსაზღვრულ მნიშვნელობას კი არ გვაძლევენ, არამედ კომპონენტების ფარდობებს. ფიზიკურად ეს ნიშნავს, რომ მხოლოდ საკუთრივი ვექტორის **მიმართულების** ფიქსირებაა შესაძლებელი, ხოლო მოდული განუსაზღვრელია. საკუთრივი ვექტორის მუდმივაზე გამრავლების შედეგად კვლავ საკუთრივი ვექტორი მიიღება. რადგანაც 4.51 ერთგვაროვანი განტოლებებია, მაშინ მათ არატრივიალური ამონახსნი მხოლოდ მაშინ აქვთ, როდესაც კოეფიციენტების დეტერმინანტი ნულის ტოლია:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.52)$$

4.52 ფორმულას მატრიცის **მახასიათებელი** ანუ **სეკულარული** განტოლება ეწოდება, ხოლო λ -ს მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას, სასურველ

საკუთრივ მნიშვნელობებს წარმოადგენენ. ამის შემდეგ ეილერის თეორემა მარტივდება და ასე ჟღერს: ნამდვილი ორთოგონალური მატრიცების შემთხვევაში სეკულარულ განტოლებას უნდა გააჩნდეს ფესვი $\lambda = + 1$.

ზოგადად, სეკულარულ განტოლებას სამი საკუთრივი ვექტორის შესაბამისი სამი ფესვი აქვს. სიმარტივისთვის X, Y, Z აღნიშვნის ნაცვლად ხშირად X_1, X_2, X_3 აღნიშვნა გამოიყენება. ამგვარი აღნიშვნისას საკუთრივი ვექტორების კომპონენტები X_{ik} სახით შეიძლება აღინიშნოს, სადაც პირველი ინდექსი გარკვეულ კომპონენტს ასახავს, ხოლო მეორე ინდექსი სამი საკუთრივი ვექტორიდან ერთ-ერთზე მიუთითებს. 4.51 ფორმულების ჯგუფის ტიპური წევრია (ცხადი შეკრების პირობებში):

$$\sum_j a_{ij} X_{jk} = \lambda_k X_{ik}$$

ან

$$\sum_j a_{ij} X_{jk} = \sum_j X_{ij} \delta_{jk} \lambda_k. \quad (4.53)$$

4.53 ფორმულის ორივე მხარეს მატრიცული ელემენტების ნამრავლია. მარცხენა მხარეს \mathbf{A} -ს X_{ik} ელემენტების მქონე \mathbf{X} მატრიცაზე ნამრავლია, ხოლო მარჯვენა მხარეს \mathbf{X} მატრიცის იმ მატრიცაზე ნამრავლია, რომლის jk რიგის ელემენტი $\delta_{jk} \lambda_k$. ბოლო მატრიცა დიაგონალურია და მისი დიაგონალური ელემენტები \mathbf{A} -ს საკუთრივი მნიშვნელობებია. აქედან გამომდინარე, ამ მატრიცას λ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

4.54 ფორმულა მატრიცულ განტოლებას გვაძლევს: $\mathbf{AX} = \mathbf{X}\lambda$, თუ ამ ფორმულის მარცხენა მხრიდან \mathbf{X}^{-1} -ზე გავამრავლებთ, გვექნება:

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX} = \lambda. \quad (4.55)$$

4.55 ფორმულის მარცხენა მხარე \mathbf{A} -ს მსგავსების გარდაქმნაა (უბრალოდ $\mathbf{X}^{-1} \mathbf{Y}$ სიმბოლოთი უნდა აღვნიშნოთ, რათა 4.41 ფორმულა მივიღოთ). მაშასადამე, 4.55 ფორმულა საკუთრივი მნიშვნელობის ამოცანის გადაჭრის ალტერნატიულ მეთოდს გვთავაზობს: \mathbf{A} -ს დიაგონალიზირება მსგავსების გარდაქმნის საშუალებით უნდა შევძლოთ. მსგავსების გარდაქმნისთვის საჭირო მატრიცის თითოეული სვეტი საკუთრივი ვექტორის კომპონენტებისგან შედგება. \mathbf{A} -ს დიაგონალიზირებული ფორმის ელემენტები შესაბამისი საკუთრივი მნიშვნელობებია.

ეილერის თეორემის დასამტკიცებლად $\tilde{\mathbf{A}}$ -ს ორთოგონალურობა გამოვიყენოთ. განვიხილოთ გამოსახულება:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{1})\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{1} - \tilde{\mathbf{A}}.$$

თუ ფორმულის ორივე მხარეს გამოყენებული მატრიცების დეტერმინანტებს ავიღებთ, მივიღებთ ტოლობას:

$$|\mathbf{A} - \mathbf{1}| |\tilde{\mathbf{A}}| = |\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{A}}|. \quad (4.56)$$

მყარი სხეულის მოძრაობის აღწერისთვის $\mathbf{A}(t)$ მატრიცა საკუთრივ ბრუნვას უნდა შეესაბამებოდეს. აქედან გამომდინარე, \mathbf{A} -ს და მისი ტრანსპონირებული მატრიცის დეტერმინანტი +1-ის ტოლი უნდა იყოს. ვინაიდან მატრიცის დეტერმინანტი მისი ტრანსპონირებული მატრიცის დეტერმინანტის ტოლია, 4.56 ფორმულიდან ტრანსპონირების ნიშნები შეგვიძლია ამოვიღოთ:

$$|\mathbf{A} - \mathbf{1}| = |\mathbf{1} - \mathbf{A}|. \quad (4.57)$$

4.57 ფორმულის თანახმად, გარკვეული მატრიცის დეტერმინანტი საპირისპირო ნიშნით აღებული იგივე მატრიცის დეტერმინანტის ტოლია. დავუშვათ, \mathbf{B} არის რაიმე $n \times n$ განზომილების მატრიცა. დეტერმინანტების თვისებიდან გამომდინარე:

$$|-\mathbf{B}| = (-1)^n |\mathbf{B}|.$$

ჩვენ სამგანზომილებიან სივრცეში ($n = 3$) ვმუშაობთ, ამიტომ 4.57 ფორმულა ნებისმიერი საკუთრივი ბრუნვისთვის მხოლოდ მაშინ არის გამოსადეგი, როდესაც:

$$|\mathbf{A} - \mathbf{1}| = 0. \quad (4.58)$$

4.58 ფორმულა 4.52 სეკულარულ განტოლებას შევადაროთ და დავინახავთ, რომ 4.52 განტოლების დამაკმაყოფილებელი ერთ-ერთი საკუთრივი მნიშვნელობა ყოველთვის არის $\lambda = +1$, რაც ეილერის თეორემის სასურველი შედეგია.

ყურადღება მიაქციეთ, თუ როგორ ვლინდება ეილერის თეორემის დამტკიცების შედეგად სივრცის განზომილებების რაოდენობის მნიშვნელობა. როდესაც სივრცეში ლუწი რაოდენობის განზომილებაა, 4.57 ფორმულა ყველა მატრიცისთვის იგივეობას წარმოადგენს და ეილერის თეორემა არ მოქმედებს. აქედან გამომდინარე, ორი განზომილების შემთხვევაში *შესაბამის სივრცეში* არ არსებობს ვექტორი, რომელიც ბრუნვის შედეგად არ იცვლება. ბრუნვის ღერძი სიბრტყისადმი პერპენდიკულარულია და შესაბამისი სივრცის გარეთ მდებარეობს.

ამჯერად სამი განზომილების პირობებში არსებული სხვა საკუთრივი მნიშვნელობების თვისებები განვსაზღვროთ. +1 საკუთრივი მნიშვნელობა λ_3 სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. მსგავსების გარდაქმნის შედეგად მატრიცის დეტერმინანტი არ იცვლება, ამიტომ 4.54 და 4.55 ფორმულებიდან და საკუთრივი ბრუნვისას \mathbf{A} -ს თვისებებიდან გამომდინარე:

$$|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (4.59)$$

A ნამდვილი მატრიცაა, ამიტომ თუ λ არის 4.52 სეკულარული განტოლების ამონახსნი, მაშინ λ^* კომპლექსურად შეუღლებულიც ამონახსნია.

თუ მოცემული λ_i საკუთრივი მნიშვნელობა კომპლექსურია, მაშინ შესაბამისი **R**_i საკუთრივი ვექტორი, რომელიც 4.59 განტოლებას აკმაყოფილებს, ზოგადად ასევე კომპლექსური იქნება. აქამდე ორთოგონალური (ნამდვილი) გარდაქმნების პირობებში კომპლექსური ვექტორების თვისებები არ შეგვისწავლია და ამიტომ ადრე მოყვანილ განსაზღვრებებში გარკვეული ცვლილებები უნდა შევიტანოთ. **R** კომპლექსური ვექტორის მოდულის ანუ სიგრძის კვადრატია $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^*$, ხოლო მატრიცული აღნიშვნით $\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}^*$. მარცხენა ვექტორზე არსებული ტრანსპონირების ნიშანი ასახავს, რომ ის ერთსტრიქონიანი მატრიცითაა წარმოდგენილი. ნამდვილი ორთოგონალური გარდაქმნისას მოდულის კვადრატია უცვლელია:

$$\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}^* = (\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R})\mathbf{A}\mathbf{R}^* = \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{R}^* = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}^*.$$

დავუშვათ, **R** კომპლექსური λ საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამისი კომპლექსური საკუთრივი ვექტორია. 4.49 ფორმულა გვაძლევს:

$$\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}^* = \lambda\lambda^*\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}^*,$$

მაშასადამე, ყველა საკუთრივი მნიშვნელობა ერთის ტოლია: $\lambda\lambda^* = 1$. (4.60)

შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ საკუთრივი მნიშვნელობების სამი შესაძლო განაწილება არსებობს. თუ ყველა საკუთრივი მნიშვნელობა ნამდვილია, მაშინ მხოლოდ ორი ვარიანტია შესაძლებელი:

1. ყველა საკუთრივი მნიშვნელობა +1-ია. გარდაქმნის მატრიცაა **1** და ამგვარ შემთხვევას ტრივიალურს ვუწოდებთ.

2. ერთი საკუთრივი მნიშვნელობაა +1, ხოლო დანარჩენი ორი საკუთრივი მნიშვნელობები -1-ია. ამგვარი გარდაქმნა შეგვიძლია დავახასიათოთ, როგორც კოორდინატთა ორი ღერძის ინვერსია, ხოლო მესამე ღერძი უცვლელია. იგივე გარდაქმნაა უცვლელი ღერძის გარშემო π კუთხით შემობრუნება.

თუ ყველა საკუთრივი მნიშვნელობა ნამდვილი არ არის, მაშინ კიდევ ერთადერთი დამატებითი ვარიანტია შესაძლებელი:

3. ერთი საკუთრივი მნიშვნელობაა +1, ხოლო დანარჩენი ორი $e^{i\phi}$ და $e^{-i\phi}$ ფორმის ერთმანეთის კომპლექსური შეუღლებულია.

ეილერის თეორემა უფრო სრულად ასე ჟღერს: ნებისმიერ არატრივიალურ ნამდვილ ორთოგონალურ მატრიცას ერთი და მხოლოდ ერთადერთი +1-ის ტოლი საკუთრივი მნიშვნელობა აქვს.

ბრუნვის ღერძის მიმმართველ კოსინუსებს მივიღებთ, თუ საკუთრივი მნიშვნელობების 4.51 განტოლებებში $\lambda = 1$ ჩავსვამთ და შემდეგ X , Y და Z -ისთვის ამოვხსნით.* ბრუნვის კუთხის მიღებაც საკმაოდ ადვილია. მსგავსების გარდაქმნის საშუალებით ყოვ-

ელთვის შესაძლებელია \mathbf{A} მატრიცის ისეთ კოორდინატთა სისტემაში გარდაქმნა, სადაც Z ღერძი ბრუნვის ღერძის გასწვრივაა მიმართული. ამგვარ კოორდინატთა სისტემაში \mathbf{A}' Z ღერძის გარშემო Φ კუთხით ბრუნვას ასახავს და შემდეგი სახე აქვს:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi & 0 \\ -\sin \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ამ მატრიცის კვალია: $1 + 2 \cos \Phi$.

მსგავსების გარდაქმნისას კვალი უცვლელია და \mathbf{A} მატრიცის კვალი ნებისმიერ საწყის კოორდინატთა სისტემის მიმართ იგივე ფორმისაა:

$$\text{Tr} \mathbf{A} = a_{ii} = 1 + 2 \cos \Phi, \quad (4.61)$$

4.61 ფორმულა Φ -ის მნიშვნელობას მატრიცული ელემენტების საშუალებით გვაძლევს. Φ ბრუნვის კუთხე კომპლექსური λ საკუთრივი მნიშვნელობების ფაზური კუთხეა, ვინაიდან საკუთრივი მნიშვნელობების ჯამი \mathbf{A} -ს დიაგონალური ფორმის (4.54 ფორმულა) კვალია. ეილერის თეორემიდან და საკუთრივი მნიშვნელობების თვისებებიდან გამომდინარე:

$$\text{Tr} \mathbf{A} = \sum_i \lambda_i = 1 + e^{i\Phi} + e^{-i\Phi} = 1 + 2 \cos \Phi. \quad \text{????????????????}$$

შემთხვევები, როდესაც ყველა საკუთრივი მნიშვნელობა ნამდვილია, ფაქტიურად კომპლექსური საკუთრივი მნიშვნელობების მქონე \mathbf{A} მატრიცის კერძო შემთხვევაა. ყველა $\lambda_i = +1$ შეესაბამება ბრუნვის $\Phi = 0$ კუთხეს (იგივური გარდაქმნა), ხოლო ორმაგი -1 საკუთრივი მნიშვნელობა $\Phi = \pi$ კუთხის შესაბამისია.

ბრუნვის ღერძის და ბრუნვის კუთხის მიმართულებების განსაზღვრა ცალსახად არ ხდება. თუ \mathbf{R} საკუთრივი ვექტორია, ასევეა $-\mathbf{R}$, ამიტომ ბრუნვის ღერძის მიმართულება განსაზღვრული არ არის. $-\Phi$ 4.61 განტოლებას აკმაყოფილებს, თუ Φ -ც ასევე იქცევა. მოძებნილი საკუთრივი მნიშვნელობები ორთოგონალურ \mathbf{A} გარდაქმნის მატრიცას ცალსახად არ აფიქსირებენ. დეტერმინანტული სეკულარული განტოლებიდან (4.52 ფორმულა) გამომდინარე, $\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}$ შებრუნებული მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები და საკუთრივი ვექტორები \mathbf{A} მატრიცის იდენტურებია. ორაზროვნება მოიხსნება, თუ Φ -ს \mathbf{A} -ს მივაკუთვნებთ, ხოლო $-\Phi$ -ს \mathbf{A}^{-1} -ს და ბრუნვის ღერძების მიმართულებას ამპერის წესით (მარჯვენა ბურღის წესით) განვსაზღვრავთ.

ეილერის თეორემიდან შემდეგი დასკვნა მიიღება და მას ზოგჯერ შასლის თეორემას უწოდებენ:

შასლის თეორემა: მყარი სხეულის ყველაზე უფრო ზოგადი გადაადგილება გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობების გაერთიანებაა.

ამ თეორემის დეტალური დამტკიცება აუცილებელია. მაგრამ მარტივად რომ ვთქვათ, სხეულის ერთი ფიქსირებული წერტილის მოძრაობის შეზღუდვა რომ მოვხსნათ, შედეგად სხეულის ღერძთა სისტემის ათვლის სათავეს თავისუფლების სამი გადატანითი ხარისხი ექნება*.

4.7 სასრული ბრუნვები

საერთო ათვლის სათავეს მქონე დეკარტის ორი კოორდინატთა სისტემის ფარდობითი ორიენტაცია სხვადასხვა მეთოდით დგინდება. მათ შორისაა ეილერის სამი კუთხე, რომელიც ერთი კოორდინატთა სისტემას მეორეზე გარდაქმნის. წინა პარაგრაფში დავამტკიცეთ, რომ კოორდინატთა გარდაქმნა ერთი ბრუნვის შედეგადაც შეიძლება, თუ მიმართულებას სწორად ავირჩევთ. მაშასადამე, სწორი იქნება კოორდინატთა გარდაქმნა ბრუნვის პარამეტრებით, კერძოდ ბრუნვის კუთხით და ბრუნვის ღერძების მიმართული კოსინუსებით წარმოვადგინოთ.

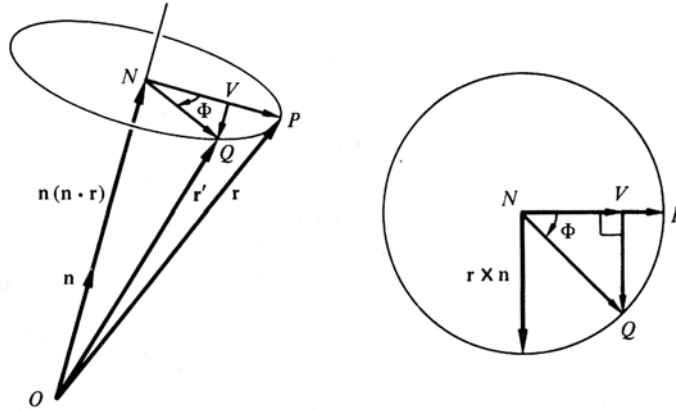
ამგვარი წარმოდგენის მიღება მარტივი ვექტორული ალგებრით არის შესაძლებელი. თავდაპირველად, გარდაქმნა ფიქსირებულ კოორდინატთა სისტემაში ვექტორის მარბრუნებლად მივიჩნიოთ (იხ. პარაგრაფი 4.2). შემდეგ გავიხსენოთ, რომ კოორდინატთა სისტემის საათის ისრის სანინაალმდეგო მიმართულებით მობრუნებისას, ვექტორი **საათის ისრის მიმართულებით** ბრუნავს. 4.8ა სურათზე ვექტორის **r** სანყისი მდებარეობა \vec{OP} სიმბოლოთა აღნიშნული, **r'** საბოლოო მდებარეობა \vec{OQ} სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო ბრუნვის ღერძის გასწვრივ გავლებულ ერთეულოვან ვექტორს **n**-ით აღვნიშნავთ. **O**-სა და **N**-ს შორის მანძილია $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$ და \vec{ON} ვექტორი $\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})$ სახით შეიძლება ჩაინეროს. 4.8ბ სურათზე ნაჩვენებია ბრუნვის ღერძისადმი პერპენდიკულარულ სიბრტყეში გავლებული ვექტორები. \vec{NP} ვექტორია $\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})$, ხოლო მისი მოდული NQ და $\mathbf{r} \times \mathbf{n}$ ვექტორების მოდულის ტოლია. **r'**-სა და **r**-ს შორის სასურველი დამოკიდებულების დასადგენად **r'** შემდეგი სამი ვექტორის ჯამის სახით ჩავწეროთ:

$$\mathbf{r}' = \vec{ON} + \vec{NP} + \vec{PQ} \quad \text{ან} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + [\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})] \cos \Phi + (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \sin \Phi.$$

გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \Phi + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos \Phi) + (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \sin \Phi. \quad (4.62)$$

4.62 ფორმულას ჩვენ **ბრუნვის ფორმულას** ვუწოდებთ. 2.6 პარაგრაფში უსასრულოდ მცირე ბრუნვისას ვექტორის ცვლილებას აღვწერეთ, ხოლო 4.62 ფორმულა სასრული ბრუნვისთვის არის გამოსადეგი.



სურ. 4.8. ბრუნვის ფორმულის გამოყვანის ვექტორული დიაგრამა

ამჯერად ბრუნვის Φ კუთხე ეილერის კუთხეების საშუალებით გამოვსახოთ. 4.61 ფორმულა ბრუნვის მატრიცის კვალს ბრუნვის ღერძისადმი პერპენდიკულარულ სიბრტყეში გვაძლევს. ვინაიდან მატრიცის კვალი ინვარიანტულია, იგივე ფორმულა 4.46 ფორმულით მოცემულ A მატრიცის კვალს უნდა გვაძლევდეს. გამოვიყენოთ ეს ტოლობა, ფორმულის ორივე მხარეს ერთი მივუმატოთ და ტრიგონომეტრიული იგივეობების გამოყენების შედეგად განტოლებას მივიღებთ, რომლის კვადრატული ფესვია:

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \cos \frac{\Phi + \psi}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (4.63)$$

კვადრატული ფესვის ნიშანს განსაზღვრავს ფიზიკური პირობა, რომლის თანახმად $\Phi \rightarrow 0$, როდესაც, ϕ , ψ და $\theta \rightarrow 0$.

4.8 უსასრულოდ მცირე ბრუნვები

წინა პარაგრაფებში სხვადასხვა მატრიცები მყარი სხეულის ორიენტაციას ასახავდნენ. ამავე დროს მატრიცული ელემენტების რაოდენობა დამოუკიდებელი ცვლადების რაოდენობაზე მეტი იყო და დამხმარე პირობების გათვალისწინება გვინევდა. შემდეგ დავადგინეთ, რომ ნებისმიერი ორიენტაცია რაიმე ღერძის გარშემო ერთი მობრუნების შედეგად შეგვიძლია მივიღოთ. შესაძლებელია ვიფიქროთ, რომ სამი დამოუკიდებელი სიდიდით განსაზღვრული ვექტორის დაკავშირება ფიქსირებული წერტილის გარშემო მყარი სხეულის სასრულ გადაადგილებასთან ძალიან მოსახერხებელია. მართლაც, მიმართულება საკუთარ თავს გვკარნახობს და ის ბრუნვის ღერძის მიმართულებას ემთხვევა, ხოლო

ბრუნვის კუთხის სიდიდედ ნებისმიერი ფუნქცია გამოდგება. მიუხედავად ზემოთქმული-სა, ასეთი შესაბამისობის მიღება შეუძლებელია. დავუშვათ, **A** და **B** ასეთ “ვექტორებს” წარმოადგენენ, რომლებიც **A** და **B** გარდაქმნებს უკავშირდებიან. ვექტორების თვისები-დან გამომდინარე:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

მაგრამ ორი ბრუნვის შეკრება ორი მატრიცის **AB** ნამრავლს შეესაბამება, ხოლო მატრიცების გამრავლებას კომუტატიური თვისება არ აქვს, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, ამიტომ **A** და **B** შეკრებისას კომუტატიურები არ არიან და მაშასადამე ვექტორებად ვერ მივიჩნევთ. სასრული ბრუნვების ჯამი ბრუნვების თანმიმდევრობაზეა დამოკიდებული და ეს ქვემოთ აღწერილი მარტივი ექსპერიმენტიდანაც მტკიცდება. 4.9 სურათზე ნაჩვენებია მოვლენათა თანმიმდევრობა. თავდაპირველად ბლოკი მასზე ფიქსირებული Z' ღერძის გარშემო 90° -ით ბრუნდება, ხოლო შემდეგ Y' ღერძის გარშემო ასევე 90° -ით ბრუნავს. 4.10 სურათზე ნაჩვენებია საწინააღმდეგო თანმიმდევრობით მომხდარი იგივე ბრუნვები. ბლოკის საბოლოო მდებარეობა აშკარად განსხვავებულია.

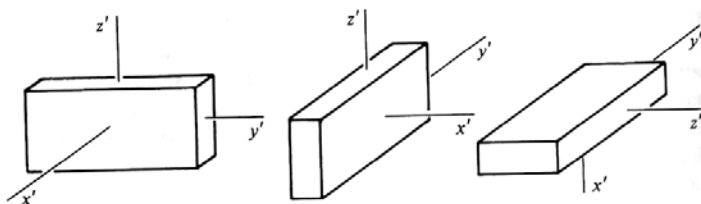
სასრული ბრუნვის ცალკეული ვექტორით წარმოდგენა შეუძლებელია, მაგრამ როდესაც მხოლოდ **უსასრულო მცირე ბრუნვები** განიხილება მდგომარეობა განსხვავებულია. უსასრულოდ მცირე ბრუნვა კოორდინატთა ღერძების ორთოგონალური გარდაქმნაა, როდესაც ვექტორის კომპონენტები ღერძების ორივე სიმრავლისთვის თითქმის იდენტურებია და ცვლილება უსასრულოდ მცირეა. აქედან გამომდინარე, რაიმე **r** ვექტორის x'_i კომპონენტი თითქმის x_i -ის ტოლია და სხვაობა ძალიან მცირეა:

$$x'_1 = x_1 + \epsilon_{11}x_1 + \epsilon_{12}x_2 + \epsilon_{13}x_3. \quad (4.64)$$

$\epsilon_{11}, \epsilon_{12}$ და ა.შ. მატრიცული ელემენტები უსასრულოდ მცირეებია და გამოთვლებისას მხოლოდ ϵ_{ij} -ს პირველი არანულოვანი რიგის შენარჩუნებაა საჭირო. ნებისმიერი ზოგადი x'_i კომპონენტისთვის უსასრულოდ მცირე გარდაქმნის განტოლებები ასე შეიძლება ჩაინერონ:

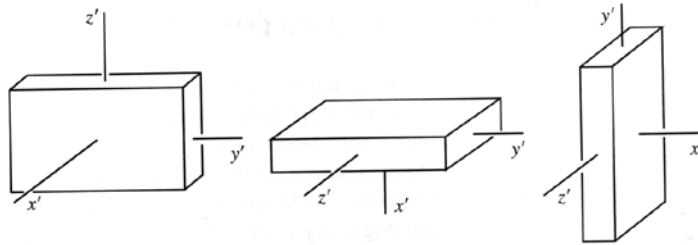
$$x'_i = x_i + \epsilon_{ij}x_j \quad \text{ან} \quad x'_i = (\delta_{ij} + \epsilon_{ij})x_j. \quad (4.65)$$

δ_{ij} სიდიდე ერთეულოვანი მატრიცის ელემენტია და 4.65 ფორმულა მატრიცულ ჩანაწერში ასეთ სახეს იღებს: $\mathbf{x}' = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon})\mathbf{x}.$ (4.66)



სურ. 4.9. მოცემული თანმიმდევრობით შესრულებული ორი ბრუნვა

- ა) ვერტიკალური მდებარეობა
- ბ) z' ღერძის გარშემო 90° -ით მობრუნება
- გ) y' შუალედური ღერძის გარშემო 90° -ით მობრუნება



სურ. 4.10. სანინააღმდეგო თანმიმდევრობით შესრულებული იგივე ორი ბრუნვა

- ა) ვერტიკალური მდებარეობა
- ბ) y' ღერძის გარშემო 90° -ით მობრუნება
- გ) z' შუალედური ღერძის გარშემო 90° -ით მობრუნება

4.66 ფორმულის თანახმად, უსასრულოდ მცირე გარდაქმნისას მატრიცის ტიპური ფორმაა $\mathbf{1} + \epsilon$ ანუ გარდაქმნა თითქმის იგივურია და მისგან მხოლოდ უსასრულოდ მცირე ოპერატორით განსხვავდება.

უსასრულოდ მცირე გარდაქმნებისას მოქმედებების თანმიმდევრობას მნიშვნელობა არ აქვს. თუ $\mathbf{1} + \epsilon_1$ და $\mathbf{1} + \epsilon_2$ უსასრულოდ მცირე გარდაქმნებია, მაშინ ერთ-ერთი შესაძლო ნამრავლია:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{1} + \epsilon_1)(\mathbf{1} + \epsilon_2) &= \mathbf{1}^2 + \epsilon_1\mathbf{1} + \mathbf{1}\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2 \\
 &= \mathbf{1} + \epsilon_1 + \epsilon_2,
 \end{aligned}
 \tag{4.67}$$

მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე მნიშვნელობები უგულებელვყავით. შებრუნებული თანმიმდევრობით გამრავლება უბრალოდ ϵ_1 -ს და ϵ_2 -ს გადაანაცვლებს, ხოლო შედეგი უცვლელია, მატრიცების შეკრება ყოველთვის კომუტატიურია. უსასრულოდ მცირე გარდაქმნების კომუტატიური თვისების შედეგად, გარდაქმნები ვექტორების საშუალებით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ. მაგალითად, ბრუნვის მატრიცა (4.46) უსასრულოდ მცირე ბრუნვის ეილერის კუთხეებისთვის არის:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & (d\phi + d\psi) & 0 \\ -(d\phi + d\psi) & 1 & d\theta \\ 0 & -d\theta & 1 \end{bmatrix}$$

და

$$d\Omega = \mathbf{i}d\theta + \mathbf{k}(d\phi + d\psi),$$

სადაც \mathbf{i} და \mathbf{k} ერთეულოვანი ვექტორებია x და z მიმართულებით.

ამჯერად უსასრულოდ მცირე გარდაქმნისთვის შებრუნებული მატრიცა მივიღოთ. თუ $\mathbf{A} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}$ გარდაქმნის მატრიცაა, მაშინ შებრუნებული მატრიცა იქნება:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.68)$$

დამტკიცებისთვის გავიხსენოთ, რომ $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$ ნამრავლი ერთეულოვან მატრიცას გვაძლევს:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{1} - \boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{1},$$

რაც შებრუნებული მატრიცის განსაზღვრებასთან შესაბამისობაშია. \mathbf{A} -ს ორთოგონალურობიდან გამომდინარე, $\tilde{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{1} + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ ტოლია \mathbf{A}^{-1} -ის. სწორედ ამიტომ, უსასრულოდ მცირე მატრიცა ანტისიმეტრიულია (იხ. 4.39 ფორმულა)*: $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = -\boldsymbol{\epsilon}$

ვინაიდან ანტისიმეტრიული მატრიცის დიაგონალური ელემენტები ნულის ტოლები უნდა იყვნენ, ნებისმიერ 3×3 განზომილების ანტისიმეტრიულ მატრიცაში მხოლოდ სამი განსხვავებული ელემენტი. მაშასადამე, $\boldsymbol{\epsilon}$ -ს შემდეგი ფორმით ჩანერისას ზოგადობა არ იკარგება:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.69)$$

$d\Omega_1$, $d\Omega_2$ და $d\Omega_3$ სიდიდეები ბრუნვის განმსაზღვრელი სამი დამოუკიდებელი პარამეტრია. აქვე დავამტკიცებთ, რომ ეს სამი სიდიდე გარკვეული სახის ვექტორის კომპონენტებია. 4.66 ფორმულის თანახმად, კოორდინატთა სისტემის უსასრულოდ მცირე გარდაქმნის პირობებში ვექტორის კომპონენტების **ცვლილება** შემდეგი მატრიცული განტოლებით შეიძლება გამოისახოს:

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r} \equiv d\mathbf{r}' = \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{r}, \quad (4.70)$$

როდესაც $\boldsymbol{\epsilon}$ 4.69 ფორმულით გამოითვლება, 4.70 ფორმულის გაშლილი ფორმაა:

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 d\Omega_3 - x_3 d\Omega_2 \\ dx_2 &= x_3 d\Omega_1 - x_1 d\Omega_3 \\ dx_3 &= x_1 d\Omega_2 - x_2 d\Omega_1. \end{aligned} \quad (4.71)$$

4.71 ფორმულების მარჯვენა მხარეები ორი ვექტორის, კერძოდ \mathbf{r} -ის $d\Omega_1$, $d\Omega_2$ და

$d\Omega$, კომპონენტების მქონე ვექტორზე ვექტორული ნამრავლის კომპონენტებია*. 4.71 ფორმულა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r} \times d\Omega. \quad (4.72)$$

\mathbf{r} ვექტორი \mathbf{B} ორთოგონალური მატრიცით შემდეგი სახით გარდაიქმნება:

$$x'_i = b_{ij}x_j. \quad (4.73)$$

თუ $d\Omega \mathbf{r}$ -ის ტიპის ვექტორია, მაშინ ის \mathbf{B} -თი იგივენაირად უნდა გარდაიქმნას. როგორც ხედავთ, $d\Omega$ ტესტის უმეტეს ნაწილს აბარებს, გარდა ერთი მომენტისა. $d\Omega$ -ს გარდაქმნის თვისებებზე დაკვირვებისას უნდა დავადგინოთ, თუ როგორ გარდაიქმნება ϵ მატრიცა კოორდინატთა გარდაქმნის პირობებში. 4.3 პარაგრაფში უკვე ვნახეთ, რომ ϵ' გარდაქმნილი მატრიცა მსგავსების გარდაქმნის შედეგად მიიღება: $\epsilon' = \mathbf{B}\epsilon\mathbf{B}^{-1}$.

ორთოგონალური მსგავსების გარდაქმნისას მატრიცის ანტისიმეტრიულობის თვისება ნარჩუნდება და ამიტომ ϵ' 4.69 ფორმულის სახითაც შეგვიძლია ჩავწეროთ, სადაც $d\Omega'_i$ წარმოადგენენ არანულოვან ელემენტებს. ამ ელემენტების დეტალური შესწავლის შედეგად ირკვევა, რომ ϵ -ს მსგავსების გარდაქმნის შედეგად: $d\Omega'_i = |\mathbf{B}|b_{ij}d\Omega_j$. (4.74)

$d\Omega$ -ს გარდაქმნა თითქმის \mathbf{r} -ის იდენტურია და მხოლოდ გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტით ანუ $|\mathbf{B}|$ კოეფიციენტით განსხვავდება.

$d\Omega$ -ს ვექტორული თვისებების გამოვლენისა და 4.74 ფორმულით მოცემული გარდაქმნის თვისებების შემონახვისთვის უფრო მარტივი მეთოდიც არსებობს. წინა პარაგრაფში \mathbf{r} -ის კომპონენტების ცვლილებისთვის ვექტორული ფორმულა მივიღეთ, როდესაც კოორდინატთა სისტემა Φ კუთხით სასრულად ბრუნავდა. თუ Φ კუთხე უსასრულოდ მცირე $d\Phi$ კუთხის ზღვარშია, მაშინ უსასრულოდ მცირე ბრუნვის შესაბამისი ფორმულა შეგვიძლია მივიღოთ. ამ ზღვარში 4.62 ფორმულაში შემავალი სიდიდეებისთვის გვექნება $\cos \Phi \rightarrow 1$ და $\sin \Phi \rightarrow \Phi$. \mathbf{r} -ის უსასრულოდ მცირე ცვლილებისთვის შემდეგი გამოსახულება მიიღება:

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r} \equiv d\mathbf{r} = \mathbf{r} \times \mathbf{n}d\Phi. \quad (4.75)$$

4.75 ფორმულის 4.72 ფორმულასთან შედარება ცხადყოფს, რომ $d\Omega$ მართლაც ვექტორია და ასე განისაზღვრება: $d\Omega = \mathbf{n}d\Phi$. (4.76)

4.75 ფორმულის მიღება სასრული ბრუნვის ფორმულის დაუხმარებლადაც შეიძლება. კოორდინატების უსასრულოდ მცირე გარდაქმნა \mathbf{r} ვექტორის საათის ისრის მიმართულებით $d\Phi$ კუთხით ბრუნვას შეესაბამება ბრუნვის ღერძის გარშემო. ეს შემთხვევა 4.11 სურათზეა გამოსახული*. $d\mathbf{r}$ -ის სიდიდე $d\Phi$ -ს პირველი რიგის მიახლოებით არის:

$$dr = r \sin \theta d\Phi,$$

$d\mathbf{r}$ ვექტორი ამ ზღვარში \mathbf{r} -ისა და $d\Omega = \mathbf{n}d\Phi$ -ისადმი პერპენდიკულარულია. $d\mathbf{r}$ ვექტორის მიმართულება მარჯვენა ბურღის მოძრაობის მიმართულებას ემთხვევა, როდესაც მას \mathbf{r} -დან $d\Omega$ -სკენ ვაბრუნებთ. 4.11 სურათზე ჩანს, რომ $d\mathbf{r}$ -ის მოდული და

მიმართულება 4.75 ფორმულით ნაწინასწარმეტყველების იდენტურია.

$d\Omega$ -ს გარდაქმნის თვისებები 4.76 ფორმულით მოიცემიან და მათ შესახებ მსჯელობა აუცილებელია. ელემენტარული ვექტორული ალგებრიდან ვიცით, რომ ინვერსიის გარდაქმნის მიმართ თვისებების თვალსაზრისით ორი სახის ვექტორი არსებობს. 4.72 ფორმულის მიხედვით გარდაქმნილ ვექტორებს **პოლარულები** ეწოდებათ. სამგანზომილებიანი ინვერსიისას:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

რომლის კომპონენტებია: $S_{ij} = -\delta_{ij}$,

პოლარული ვექტორის ყველა კომპონენტი ნიშანს იცვლის.

აქსიალური ვექტორების ანუ **ფსევდოვექტორების** კომპონენტები ინვერსიისას ნიშანს არ იცვლიან. აქსიალური ვექტორის უმარტივესი მაგალითი ორი პოლარული ვექტორის ვექტორული ნამრავლია:

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{D} \times \mathbf{F},$$

სადაც ვექტორული ნამრავლის კომპონენტები ასე განისაზღვრებიან:

$$V_i^* = D_j F_k - F_j D_k, \quad i, j, k \text{ ციკლურ რიგში} \quad (4.77)$$

\mathbf{D} -ს და \mathbf{F} -ს კომპონენტები ინვერსიისას ნიშანს იცვლიან, ხოლო \mathbf{V}^* -ს კომპონენტების ნიშნები უცვლელელებია. მრავალი ცნობილი ფიზიკური სიდიდე, მაგალითად $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ იმპულსის მომენტი და მაგნიტური ველის ინტენსივობა, აქსიალური ვექტორია. გარდაქმნის კანონს აქსიალური ვექტორისთვის 4.74 ფორმულის სახე აქვს. საკუთრივი ორთოგონალური გარდაქმნებისას აქსიალური და პოლარული ვექტორები ერთმანეთისგან არ განსხვავდებიან, მაგრამ არასაკუთრივი ანუ ინვერსიის შემცველი გარდაქმნისას $|\mathbf{V}^*|$ დეტერმინანტი -1-ის ტოლია და ვექტორები განსხვავებულად იქცევიან.

ამ თვისების უკეთესად განმარტებისთვის \mathbf{P} ინვერსიის ოპერატორი განვსაზღვროთ. \mathbf{P} ოპერატორი ასრულებს გარდაქმნას $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow -z$. თუ S სკალარია, \mathbf{V} პოლარული ვექტორია, ხოლო \mathbf{V}^* აქსიალური ვექტორია, მაშინ:

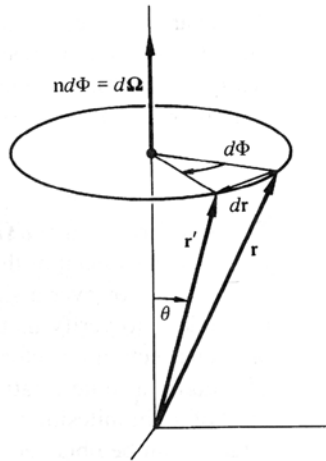
$$\mathbf{P}S = S$$

$$\mathbf{P}\mathbf{V} = -\mathbf{V}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^*,$$

$$\text{ცხადია: } \mathbf{P}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^*) = -(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^*).$$

მაშასადამე, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^*$ არის S^* ფსევდოსკალარი და მისი თვისებაა $\mathbf{P}S^* = -S^*$, ხოლო $\mathbf{P}(SS^*) = -SS^*$, $\mathbf{P}(S\mathbf{V}) = -S\mathbf{V}$, $\mathbf{P}(S\mathbf{V}^*) = S\mathbf{V}^*$.



სურ. 4.11. ვექტორის ცვლილება საათის ისრის მიმართულების უსასრულოდ მცირე ბრუნვისას

გარდაქმნის პასიური ინტერპრეტაციისას კარგად ჩანს, თუ რატომ მოქმედებენ პოლარული ვექტორები ინვერსიისას ამგვარად. ვექტორი გარდაქმნის შედეგად უცვლელია, მაგრამ კოორდინატთა ღერძები და მაშასადამე კომპონენტები ნიშანს იცვლიან. რა ხდება აქსიალური ვექტორის შემთხვევაში? ინვერსიისას მარჯვენა კოორდინატთა სისტემა მარცხენად გარდაიქმნება და ვინაიდან 4.77 ფორმულა ციკლურ რიგს ითხოვს, ხრახნული მოძრაობა მარჯვენის ნაცვლად მარცხენა მიმართულებით ხდება. აქედან გამომდინარე, პასიური ინტერპრეტაციის პირობებშიც კი ვექტორული ნამრავლის მიმართულება ინვერსიისას იცვლება.

ამჯერად ცხადია, თუ რატომ გარდაიქმნება $d\Omega$ აქსიალური ვექტორის მსგავსად და 4.74 ფორმულის მიხედვით. 4.75 ფორმულაში \mathbf{r} და $d\mathbf{r}$ პოლარული ვექტორებია, ამიტომ \mathbf{n} და $d\Omega$ აქსიალური ვექტორები უნდა იყვნენ. გეომეტრიული თვალსაზრისით, კოორდინატების ინვერსია შეესაბამება მარჯვენა ბურღის წესის შეცვლას მარცხენა ბურღის წესით, როდესაც \mathbf{n} -ის მიმართულება განისაზღვრება.

ვექტორული ნამრავლების განხილვის შედეგად ახალი აღნიშვნები შეგვიძლია შემოვიღოთ, რაც მომავალში ძალიან გამოგვადგება. ϵ_{ijk} **გადანაცვლების სიმბოლო** ანუ **ლევინ-ჩივიტას სიმკვრივე** ნულის ტოლია, თუ ijk ინდექსებიდან ნებისმიერი ორი ერთმანეთის ტოლია. როდესაც ijk ინდექსები 1,2,3-ის ლუწი ან კენტი გადანაცვლებაა, გადანაცვლების სიმბოლო შესაბამისად +1-ის ან -1-ის ტოლია. მაშასადამე, ვექტორული ნამრავლის კომპონენტებისთვის განკუთვნილი 4.77 ფორმულა გადანაცვლების სიმბოლოს საშუალებით ასე შეიძლება ჩაინეროს:
$$V_i^* = \epsilon_{ijk} D_j F_k, \quad (4.77')$$

ამ ფორმულაში შეკრების ჩვეულებრივი წესი გამოვიყენეთ.

ბრუნვის აღწერის აქამდე მოყვანილი მეთოდებით მყარი სხეულის ორიენტაციის წარმოდგენა შეგვიძლია. გაითვალისწინეთ, რომ გარდაქმნა პირველ რიგში კოორდინატთა სისტემის (იხ. სურ. 4.12ა) ბრუნვას მოიცავს. ფიქსირებულ კოორდინატთა სისტემაში ვექტორის ბრუნვის შესაბამისი „აქტიური“ ინტერპრეტაცია საწინააღმდეგო ანუ საათის ისრის მიმართულებით ბრუნვას მოითხოვს. ფიზიკაში და კერძოდ მექანიკაში არსებობს მრავალი შემთხვევა, როდესაც **ფიზიკური სისტემის** და მასთან დაკავშირებული ვექტორების (იხ. სურ. 4.12ბ) ბრუნვას ვეხებით. ბრუნვისას სისტემის ინვარიანტულობასა და იმპულსის მომენტის მუდმივობას შორის დამოკიდებულება უკვე განვიხილეთ (იხ. პარაგრაფი 2.6). ასეთ შემთხვევებში ვექტორის ბრუნვა საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით უნდა განვიხილოთ. ბრუნვის ზემოთ მოყვანილი ფორმულების ნაწილს კვლავ ჩამოვთვლით, თუმცა ვექტორების საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ბრუნვის პირობებში. **მოცემული პარაგრაფის დასასრულამდე მოყვანილი ყველა განტოლება და მტკიცება მხოლოდ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ბრუნვებს შეესაბამება.**

ბრუნვის 4.62 ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \Phi + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos \Phi) + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \Phi, \quad (4.62')$$

შესაბამისი უსასრულოდ მცირე ბრუნვის 4.75 ფორმულა ასე ჩაიწერება:

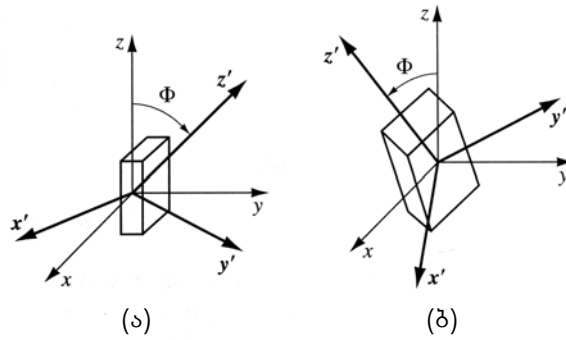
$$d\mathbf{r}' = d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = (\mathbf{n} \times \mathbf{r})d\Phi = -(\mathbf{r} \times \mathbf{n})d\Phi. \quad (4.75')$$

უსასრულოდ მცირე ბრუნვის ანტისიმეტრიული მატრიცის 4.69 ფორმულა იქნება:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 0 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} d\Phi. \quad (4.69')$$

სადაც n_i არიან ბრუნვის ღერძის გასწვრივ გავლებული $\hat{\mathbf{n}}$ ერთეულოვანი ვექტორის კომპონენტები. თუ $d\mathbf{r}$ ასახავს უსასრულოდ მცირე $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ ცვლილებას, მაშინ 4.66 ფორმულა მატრიცული დიფერენციალური განტოლების ფორმას მიიღებს ბრუნვის კუთხის მიმართ: $\frac{d\mathbf{r}}{d\Phi} = -\mathbf{N}\mathbf{r}$, (4.78)

სადაც \mathbf{N} არის 4.69' ფორმულის მარჯვენა მხარეს მოცემული მატრიცის ტრანსპონირებული და მისი ელემენტებია $N_{ij} = \epsilon_{ijk} n_k$.



სურ. 4.12. ა) (x, y, z) კოორდინატა სისტემიდან (x', y', z') კოორდინატა სისტემაზე გარდაქმნა. შეთანხმების მიხედვით, გარდაქმნა საათის ისრის მიმართულებით დადებითად მიიჩნევა. ამგვარ გარდაქმნას პასიურს ვუწოდებთ. ბ) სხეულის ბრუნვა Φ' კუთხით. შეთანხმების მიხედვით, ბრუნვა საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით დადებითად მიიჩნევა. სხეულის ნერტილების კოორდინატები ბრუნვამდე არიან (x, y, z) , ხოლო ბრუნვის შემდეგ - (x', y', z') . ფიზიკური სხეული მოძრაობს, ამიტომ ამგვარ გარდაქმნას აქტიური ეწოდება.

ძალიან მოსახერხებელია, თუ 4.69' ფორმულაში ϵ -ს ასეთი სახით შევიტანთ:

$$\epsilon = n_i \mathbf{M}_i d\Phi$$

სადაც \mathbf{M}_i სამი მატრიცაა:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.79)$$

\mathbf{M}_i მატრიცებს უსასრულოდ მცირე ბრუნვის წარმომქმნელები (გენერატორები) ეწოდებათ და მათ ნამრავლს შემდეგი თვისება აქვს:

$$\mathbf{M}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{M}_j \mathbf{M}_i \equiv [\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{M}_k. \quad (4.80)$$

მატრიცების ნამრავლებს შორის სხვაობას ანუ კომუტატორს ლის ფრჩხილები ან \mathbf{M}_i ეწოდება და 4.80 ფორმულა ბრუნვის კუთხის პარამეტრებში გამოსახული ბრუნვის

ჯგუფის **ლის ალგებრას** განსაზღვრავს. ბრუნვის ჯგუფური თეორიის უფრო ღრმად შესწავლა შორს წაგვიყვანს, მაგრამ ბრუნვის ასეთ თვისებებს მომავალში მაინც შევხვებით (იხ. პარაგრაფი 9.5 და დამატება).

4.9 ვექტორის ცვლილების სიჩქარე

უსასრულოდ მცირე ბრუნვის ცნება მყარი სხეულის დროში მოძრაობის ასახვის ძლიერი იარაღია. მოდით მექანიკურ ამოცანაში შესული რაიმე \mathbf{G} ვექტორი ან ფსევდოვექტორი განვიხილოთ, როგორცაა სხეულის ნერტილის მდებარეობის ვექტორი ან სრული იმპულსის მომენტი. ჩვეულებრივ, სხეულის დროში მოძრაობასთან ერთად ამგვარი ვექტორი იცვლება, ხოლო ცვლილება ხშირად კოორდინატთა სისტემაზეა დამოკიდებული, საიდანაც დაკვირვება მიმდინარეობს. მაგალითად, თუ ვექტორი სხეულის ღერძთა სიმრავლის ათვლის სათავიდან მყარი სხეულის ნერტილისკენ გავლებული რადიუს-ვექტორია, მაშინ სხეულის ღერძთა სიმრავლის მიმართ ეს ვექტორი არ იცვლება. მიუხედავად ამისა, სივრცეში მდებარე ღერძთა სიმრავლის მიმართ ფიქსირებული დამკვირვებლის თვალთახედვით, ვექტორის კოორდინატები სხეულის მოძრაობასთან ერთად დროში იცვლებიან.

სხეულის ღერძთა სისტემაში მყოფი დამკვირვებლის მიერ დანახული \mathbf{G} ზოგადი ვექტორის კომპონენტების ცვლილება dt დროში სივრცეში მდებარე ღერძთა სისტემიდან დანახული ცვლილებებისგან განსხვავდება. $\boxed{\mathbf{G}}$ -ს ორ განსხვავებულ ცვლილებას შორის დამოკიდებულება ფიზიკური არგუმენტებიდან შეგვიძლია მივიღოთ. ვექტორის ამ ორი ცვლილების შორის სხვაობა სხეულის ღერძების ბრუნვითაა გამოწვეული:

$$(d\mathbf{G})_{\text{სივრცე}} = (d\mathbf{G})_{\text{სხეული}} + (d\mathbf{G})_{\text{ბრუნვა}}$$

ამჯერად მყარ სხეულზე მიმაგრებული ვექტორი განვიხილოთ. სხეულის ბრუნვისას, სხეულზე მიმაგრებული დამკვირვებლის თვალთახედვით ანუ სხეულის ღერძების მიმართ ვექტორის კომპონენტები უცვლელეებია. მაშასადამე, $(d\mathbf{G})_{\text{სივრცე}}$ -ზე ზეგავლენას მხოლოდ სხეულის ბრუნვა ახდენს. ვინაიდან ვექტორი სხეულზეა ფიქსირებული, ის სხეულთან ერთად **საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით** ბრუნავს და სივრციდან დანახული ვექტორის ცვლილება 4.75' ფორმულით გამოითვლება, ხოლო $(d\mathbf{G})_{\text{ბრუნვა}}$ არის:

$$(d\mathbf{G})_{\text{ბრუნვა}} = d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{G}.$$

ნებისმიერი \mathbf{G} ვექტორის შემთხვევაში სივრცითი ღერძების მიმართ ცვლილებაა:

$$(d\mathbf{G})_{\text{სივრცე}} = (d\mathbf{G})_{\text{სხეული}} + d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{G}. \quad (4.81)$$

ვექტორის ორივე დამკვირვებლის მიერ დანახული **დროში ცვლილების სიჩქარე** 4.81 ფორმულის ყველა წევრის დიფერენციალურ dt დროის ელემენტზე გაყოფით მიიღება:

$$\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\text{სივრცე}} = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\text{სხეული}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}. \quad (4.82)$$

სადაც $\boldsymbol{\omega}$ არის სხეულის მყისი **კუთხური სიჩქარე**, დრომელიც შემდეგი კავშირით განისაზღვრება*: $\boldsymbol{\omega} dt = d\boldsymbol{\Omega}$. (4.83)

$\boldsymbol{\omega}$ ვექტორი t -სა და $t + dt$ -ს შორის დროის შუალედში მომხდარი, უსასრულოდ მცირე ბრუნვის ღერძის გასწვრივაა გავლებული და ამ მიმართულებას **ბრუნვის მყისი ღერძი** ეწოდება. $\boldsymbol{\omega}$ -ს მოდული სხეულის ბრუნვის მყისი სიჩქარეა.

4.82 ფორმულა სივრცისა და სხეულის კოორდინატებს შორის გარდაქმნის ორთოგონალური მატრიცით შეიძლება მოიცეს. \mathbf{G} ვექტორის i სივრცითი ღერძის გასწვრივი კომპონენტი სხეულის ღერძების გასწვრივ კომპონენტებს შემდეგი ფორმულით უკავშირდება:

$$G_i = \tilde{a}_{ij} G'_j = a_{ji} G'_j.$$

როდესაც სხეული დროში მოძრაობს, G'_j კომპონენტები გარდაქმნის მატრიცის a_{ij} ელემენტების მსგავსად იცვლებიან. აქედან გამომდინარე, დიფერენციალურ dt დროის ელემენტში G_i -ს ცვლილებაა: $dG_i = a_{ji} dG'_j + da_{ji} G'_j$. (4.84)

ზოგადობა არ დაიკარგება, თუ ჩვენ ჩავთვლით, რომ სივრცის და სხეულის ღერძები t დროს ერთმანეთს მყისიერად ემთხვევიან. მაშინ ამ ორ სისტემაში არსებული კომპონენტები მყისიერად ერთმანეთის ტოლები არიან, მაგრამ ვინაიდან სისტემები ერთმანეთის მიმართ მოძრაობენ, დიფერენციალები ერთმანეთის ტოლები არ იქნებიან. მაშასადამე, $G'_j = G_j$, მაგრამ $a_{ji} dG'_j = dG'_i$ და დიფერენციალი სხეულის ღერძთა სისტემაში იზომება. dt დროში $\tilde{\mathbf{A}}$ მატრიცის ცვლილება ერთეულოვანი მატრიციდან ცვლილებაა და უსასრულოდ მცირე ბრუნვის $\boldsymbol{\epsilon}$ მატრიცას შეესაბამება. $\boldsymbol{\epsilon}$ -ს ანტისიმეტრიულობიდან გამომდინარე: $da_{ji} = (\tilde{\boldsymbol{\epsilon}})_{ij} = -\epsilon_{ij}$.

$\boldsymbol{\epsilon}$ -ს ელემენტები ϵ_{ijk} გადანაცვლების სიმბოლოს საშუალებით ასე შეიძლება ჩაინერონ (იხ. 4.69 ფორმულა): $-\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ijk} d\Omega_k = \epsilon_{ikj} d\Omega_k$.

4.84 ფორმულა ასეთ სახეს იღებს:

$$dG_i = dG'_i + \epsilon_{ikj} d\Omega_k G_j.$$

ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეს ჩანერილი წევრი ვექტორული ნამრავლის \square კომპონენტია და ამიტომ ორ სისტემაში არსებულ დიფერენციალებს შორის შემდეგი დამოკიდებულებაა: $dG_i = dG'_i + (d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{G})_i$, (4.85)

მივიღეთ 4.81 ფორმულის i კომპონენტი.

4.81 ფორმულა იმდენად \mathbf{G} ვექტორის განტოლება არ არის, რამდენადაც ორ კოორდინატთა სისტემას შორის დროით წარმოებულის გარდაქმნის შესახებ მტკიცება. განარმოებაში გამოყენებული \mathbf{G} ვექტორის პირობითი ბუნება კარგად ჩანს, თუ 4.82 ფორმულას რაიმე ვექტორზე მოქმედი ოპერატორული განტოლების სახით ჩავწერთ:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times. \quad (4.86)$$

სადაც s და r ინდექსები შესაბამისად სივრცის და სხეულის ღერძთა სისტემაში დაკვირვებული დროით წარმოებულებულია. ეს ვექტორული განტოლება, რა თქმა უნდა, ღერძების ნებისმიერი სასურველი სიმრავლის მიმართ შეიძლება დაიშალოს, თუმცა უნდა გვახსოვდეს, რომ დროში ცვლილების სიჩქარე მხოლოდ გარკვეული კოორდინატთა სისტემის მიმართ იზომება. როდესაც ვექტორის დროით წარმოებული ერთი კოორდინატთა სისტემის მიმართ გამოითვლება, კომპონენტები კოორდინატთა ღერძების სხვა სიმრავლეზე მხოლოდ მაშინ შეგვიძლია გადავიტანოთ, როდესაც დიფერენცირება დასრულებულია.

ხშირად მოსახერხებელია კუთხური სიჩქარის ვექტორის ეილერის კუთხეებისა და მათი დროით წარმოებულების საშუალებით გამოსახვა. $\boldsymbol{\omega}$ -სთან ასოცირებული უსასრულოდ მცირე ბრუნვა სამი მიმდევრობითი უსასრულოდ მცირე ბრუნვისგან შედგება, რომელთა კუთხური სიჩქარეებია $\boldsymbol{\omega}_\phi = \dot{\phi}$, $\boldsymbol{\omega}_\theta = \dot{\theta}$ და $\boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\psi}$. უსასრულოდ მცირე ბრუნვების ვექტორული თვისებიდან გამომდინარე, $\boldsymbol{\omega}$ ვექტორი კუთხური სიჩქარის ამ სამი ვექტორის ჯამია. სამწუხაროდ, $\boldsymbol{\omega}_\phi$, $\boldsymbol{\omega}_\theta$ და $\boldsymbol{\omega}_\psi$ ვექტორების მიმართულებები სიმეტრიულად არ არიან განლაგებულნი: $\boldsymbol{\omega}_\phi$ მიმართულია სივრცის z ღერძის გასწვრივ, $\boldsymbol{\omega}_\theta$ - კვანძების ხაზის გასწვრივ, ხოლო $\boldsymbol{\omega}_\psi$ - სხეულის z' ღერძის გასწვრივ. მიუხედავად ამისა, 4.4 პარაგრაფში მოყვანილი, ორთოგონალური \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} გარდაქმნები შეგვიძლია გამოვიყენოთ, რათა ღერძების ნებისმიერი სასურველი სიმრავლის გასწვრივ ამ ვექტორების კომპონენტები მივიღოთ.

სხეულის ღერძთა სიმრავლე მოძრაობის განტოლებების შესწავლისთვის ყველაზე უფრო მოსახერხებელია და ამიტომ $\boldsymbol{\omega}$ -ს კომპონენტებს სწორედ ასეთი კოორდინატთა სისტემისთვის გამოვთვლით. ვინაიდან $\boldsymbol{\omega}_\phi$ სივრცის z ღერძის პარალელურია, სხეულის ღერძების გასწვრივ მისი კომპონენტები სრული ორთოგონალური $\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$ გარდაქმნის შედეგად მიიღებინ:

$$(\boldsymbol{\omega}_\phi)_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \quad (\boldsymbol{\omega}_\phi)_y = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \quad (\boldsymbol{\omega}_\phi)_z = \dot{\phi} \cos \theta.$$

ყურადღება მიაქციეთ, რომ $\dot{\phi}$ -ს $\dot{\phi} \sin \theta$ გეგმილი აქვს x' , y' სიბრტყეში და კვანძების ხაზისადმი პერპენდიკულარულია.

კვანძების ხაზი $\boldsymbol{\omega}_\theta$ -ის მიმართულებისაა და $\dot{\psi}$ ღერძს ემთხვევა, ამიტომ $\boldsymbol{\omega}_\theta$ -ს კომ-

პონენტები სხეულის ღერძების მიმართ საბოლოო ორთოგონალური \mathbf{B} გარდაქმნის (4.45 ფორმულა) შედეგად მიიღებინ:

$$(\omega_\theta)_x = \dot{\theta} \cos \psi, \quad (\omega_\theta)_y = -\dot{\theta} \sin \psi, \quad (\omega_\theta)_z = 0.$$

z' ღერძის გასწვრივ მდებარე ω_ψ -ს კომპონენტების გარდაქმნა საჭირო არ არის ($\omega_\psi = \dot{\psi}$). თუ კუთხური სიჩქარეების ამ კომპონენტებს შევკრებთ, ω -ს კომპონენტები სხეულის ღერძების მიმართ იქნებიან:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_y &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_z &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{4.87}$$

იგივე მეთოდის გამოყენებით შეგვიძლია გამოვსახოთ ω -ს კომპონენტები, სივრცის ღერძების სიმრავლის მიმართ ეილერის კუთხეების საშუალებით.

4.10 კორიოლისის ეფექტი

4.86 ფორმულა ძირითადი კინემატიკური კანონია და მას მყარი სხეულის მოძრაობის დინამიკური განტოლებები ეფუძნებიან. ამ ფორმულის გამოყენების სფერო მხოლოდ მყარი სხეულების მოძრაობით არ ამოიწურება. ის მბრუნავ კოორდინატთა სისტემის მიმართ ნივთიერი წერტილის ან ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის შემთხვევაშიც გამოიყენება.

ამ შემთხვევაში დედამიწასთან ერთად მრბუნავი კოორდინატთა ღერძების მიმართ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის აღწერა განსაკუთრებით მნიშვნელოვან საკითხს წარმოადგენს. გაიხსენეთ, რომ 1.1 პარაგრაფში ინერციული სისტემა განვსაზღვრეთ, როგორც სისტემა, რომელშიც ნიუტონის მოძრაობის კანონები მოქმედებენ. მრავალ შემთხვევაში მბრუნავ დედამიწასთან დაკავშირებული კოორდინატთა სისტემა წარმოადგენს ინერციული სისტემის კარგ მიახლოებას. მაგრამ კოორდინატთა სისტემა, რომელშიც ადგილობრივი ვარსკვლავები ფიქსირებულია, კიდევ უფრო ახლოსაა იდეალურ ინერციულ სისტემასთან. დედამიწის ბრუნვის შედეგად ამ უფრო იდეალური ინერციული სისტემის მიმართ შესამჩნევი მოვლენები წარმოიქმნებიან. 4.86 ფორმულა დედამიწასთან დაკავშირებული არაინერციული სისტემის მიმართ მოძრაობის განტოლებებში შესატან ცვლილებებს გვაძლევს.

თავდაპირველად, 4.86 ფორმულა დედამიწის სისტემის სათავიდან მოცემულ ნივთიერ წერტილამდე გავლებულ \mathbf{r} რადიუს-ვექტორს მივუსადაგოთ: $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, (4.88)

სადაც \mathbf{v}_s და \mathbf{v}_r ნივთიერი წერტილის სიჩქარეებია შესაბამისად სივრცის და მრბუნავ ღერძთა სიმრავლეების მიმართ, ხოლო $\boldsymbol{\omega}$ დედამიწის (მუდმივი) კუთხური სიჩქარეა

ინერციული სისტემის მიმართ. შემდეგ 4.86 ფორმულის დახმარებით \mathbf{v}_s -ის დროში ცვლილების სიჩქარე გამოვთვალოთ:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right)_s &= \mathbf{a}_s = \left(\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_s \\ &= \mathbf{a}_r + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (4.89)$$

სადაც \mathbf{v}_s 4.88 ფორმულიდან ჩავსვით, ხოლო \mathbf{a}_s და \mathbf{a}_r ნივთიერი წერტილის აჩქარებებია ამ ორ სისტემაში. საბოლოო ჯამში, მოძრაობის განტოლება, რომელიც ათვლის ინერციულ სისტემაში უბრალოდ არის: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_s$,

მბრუნავ კოორდინატებში გამოსახვის შედეგად ასეთ სახეს იღებს:

$$\mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m\mathbf{a}_r. \quad (4.90)$$

მბრუნავ სისტემაში მყოფი დამკვირვებლის თვალთახედვით, ნივთიერი წერტილი \mathbf{F}_{eff} ეფექტური ძალის მოქმედების შედეგად მოძრაობს:

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = \mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (4.91)$$

მოდით 4.91 ფორმულის წევრები გამოვიკვლიოთ. ფორმულის უკანასკნელი წევრი $\boldsymbol{\omega}$ -ისადმი პერპენდიკულარული ვექტორია და მიმართულია მოშორებით. მისი მოდულია $m\omega^2 r \sin\theta$. მამასადამე, ეს წევრი კარგად ნაცნობი ცენტრიდანული ძალაა. როდესაც ნივთიერი წერტილი მოძრავ სისტემაში უძრავია, ეფექტურ ძალას მხოლოდ ცენტრიდანული ძალა ემატება. როდესაც ნივთიერი წერტილი მოძრაობს, მოქმედებას შუა წევრი იწყებს, რომელსაც **კორიოლისის ეფექტი*** ეწოდება. ორივე ამ სიდიდის რიგი დედამიწის ზედაპირზე მდებარე ნივთიერი წერტილისთვის იოლად გამოითვლება. დედამიწა ჩრდილოეთ პოლუსის გარშემო საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ბრუნავს და უძრავი ვარსკვლავებისადმი მისი კუთხური სიჩქარეა:

$$\omega = \left(\frac{2\pi}{24 \times 3600}\right) \left(\frac{366.25}{365.25}\right) = 7.292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

პირველ ფრჩხილებში მზისკენ გავლებული რადიუს-ვექტორისადმი კუთხური სიჩქარეა მოცემული. მეორე ფრჩხილებში ჩასმული სიდიდე წელიწადში არსებული ვარსკვლავური დღეების რაოდენობის შეფარდებაა მზის დღეების შესაბამის რაოდენობასთან და ის უძრავი ვარსკვლავებისადმი კუთხური სიჩქარის შემასწორებელი კოეფიციენტია. როდესაც $\boldsymbol{\omega}$ ამგვარი მნიშვნელობა აქვს და r დედამიწის ეკვატორული რადიუსია, მაქსიმალური ცენტრისკენული აჩქარებაა: $\omega^2 r = 3.38 \text{ cm/s}^2$,

მიღებული შედეგი მიზიდულობის აჩქარების დაახლოებით 0,3%-ია. აჩქარება მცირეა, მაგრამ ეს არ ნიშნავს, რომ მისი უგულებელყოფა შეიძლება. მიზიდულობის ეფექტი დედამიწის მასის განაწილების გრავიტაციული ველის და ცენტრისკენული აჩქარების მოქმედების გაერთიანებაა. ამ ორი სიდიდის ჯამს დედამიწის **მიზიდულობის ველი** ეწოდება და მისი **გრავიტაციული ველისგან** განსხვავდება.

მდგომარეობა კიდევ უფრო რთულდება ცენტრისკენული აჩქარების ზეგავლენით მბრუნავი დედამიწის გაბრტყელებაზე. დედამიწა რომ მთლიანად სითხე ყოფილიყო, ბრუნვის შედეგად ელიფსოიდის ფორმას მიიღებდა, ხოლო მისი ზედაპირი გაერთიანებული მიზიდულობის ველის ეკვიპოტენციური ზედაპირი იქნებოდა. დედამიწაზე არსებული ზღვების საშუალო დონე წონასწორულ ელიფსოიდთან ძალიან მიახლოებულია და **გეოიდსაც** განსაზღვრავს.

ადგილობრივი შეშფოთებების გათვალისწინების გარეშე, მიზიდულობის ძალა გეოიდის ეკვიპოტენციური ზედაპირისადმი პერპენდიკულარულია. შესაბამისად, ადგილობრივი ვერტიკალი ზედაპირის მოცემულ წერტილზე გეოიდისადმი პერპენდიკულარული მიმართულებისაა. დედამიწის გარკვეულ ადგილზე მომხდარი მოვლენებისთვის 4.91 ფორმულაში შემავალ ცენტრისკენული აჩქარებას **g** მიზიდულობის აჩქარება შთანთქავს და ის ადგილობრივი ვერტიკალის გასწვრივაა მიმართული. დედამიწაზე **g**-ს მოდული განედის მიხედვით იცვლება. ცენტრისკენული აჩქარების და დედამიწის გაბრტყელების ზეგავლენის შედეგად, ეკვატორზე **g**-ს მოდული პოლუსებთან შედარებით 0,53%-ით ნაკლებია.

სხვათა შორის, მზის გარშემო დედამიწის ბრუნვის შედეგად ნივთიერი წერტილზე მოქმედი ცენტრიდანული ძალა მიზიდულობასთან შედარებით საგრძნობია, მაგრამ მას მზისკენ მიმართული გრავიტაციული ძალა თითქმის აბალანსებს. თუ დედამიწა-მზის სისტემის მოძრაობას დედამიწასთან დაკავშირებული მრბუნავი ათვლის სისტემიდან გავანალიზებთ, სწორედ ცენტრიდანულ ძალასა და გრავიტაციულ მიზიდულობის შორის ბალანსი ინარჩუნებს დედამიწასა და მზეს შორის არსებულ მანძილს. ნიუტონისეულ ინერციული სისტემიდან შესრულებული ანალიზი განსხვავებულ სურათს გვაძლევს. როგორც 3.3 პარაგრაფში აღვწერეთ, იმპულსის მომენტი ეფექტურ პოტენციურ ენერჯიაში შედის და დედამიწას ორბიტაზე აჩერებს.

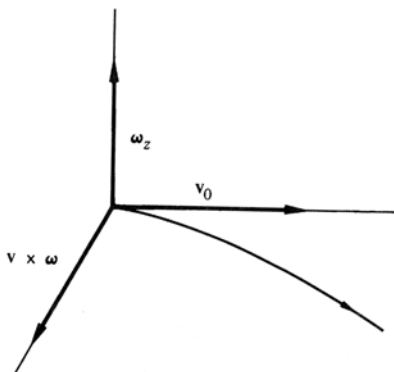
მოძრავ ნივთიერ წერტილზე არსებული კორიოლისის ეფექტი **ω**-სა და **v**-სადმი¹ პერპენდიკულარულია. ჩრდილოეთ ნახევარსფეროზე **ω** მიმართულია დედამიწიდან მოშორებით და $2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$ კორიოლისის ეფექტი დედამიწის ზედაპირის გასწვრივ გასროლილი სხეულის მოძრაობის მიმართულებას მარჯვნივ გადახრის (სურ. 4.13). კორიოლისის გადახრას სამხრეთ ნახევარსფეროზე საპირისპირო მიმართულება აქვს, ხოლო ეკვატორზე, სადაც **ω** პორიზონტალურია, ნულის ტოლია. კორიოლისის აჩქარების მოდული ქვემოთ მოცემულ სიდიდეზე ყოველთვის ნაკლებია: $2\omega v \leq 1.5 \times 10^{-4}v$,

10^5 სმ/წმ (დაახლოებით 2000მილი/სთ) სიჩქარის შემთხვევაში აჩქარება დაახლოებით 15მ/წმ^2 , ანუ 0,015გ-ია. ამგვარი აჩქარება, ჩვეულებრივ, ძალიან მცირეა, მაგრამ ზოგიერთ შემთხვევაში ის მნიშვნელოვანი ხდება. დავუშვათ, სასროლი ჩრდილოეთ პოლუსზე პორიზონტალურად ისროლეს. კორიოლისის აჩქარება $2\omega v$ სიდიდის იქნება, ხოლო t

1 აქედან მოყოლებული რ ინდექსებს აღარ გამოვიყენებთ, ვინაიდან ყველა სიჩქარე მბრუნავი კორდინატთა ღერძებისადმი აითვლება

დროის შემდეგ წრფივი გადახრა $\omega v t^2$ გახდება. კუთხური გადახრა წრფივი გადახრის განვლილ მანძილთან შეფარდება: $\theta = \frac{\omega v t^2}{v t} = \omega t$, (4.92)

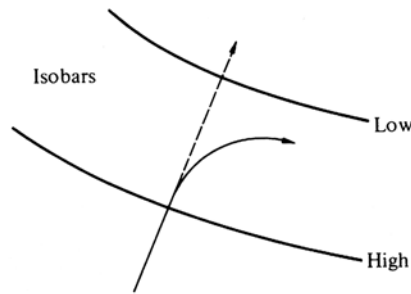
მივიღეთ კუთხე, რომლითაც t დროში დედამინა ბრუნდება. ამგვარი შედეგი ნიშნავს, რომ ჩრდილოეთ პოლუსზე გასროლილი სხეული თავდაპირველად არ ბრუნავს, მისი ტრაექტორია ინერციულ სივრცეში წრფეა და ხილულ გადახრას მის ქვემოთ მბრუნავი დედამინა იწვევს. კორიოლისის ეფექტის სიდიდის შესახებ გარკვეული წარმოდგენა შეგვექმნება, თუ 4.92 ფორმულაში ფრენის დროდ 100 წამს მივიჩნევთ, რაც დიდი სასროლების შემთხვევაში საკმაოდ ლოგიკურია. ამ შემთხვევაში კუთხური გადახრა 7×10^{-3} რადიანი ანუ დაახლოებით $0,4^\circ$ -ია. ცხადია, კორიოლისის ეფექტს კიდევ უფრო დიდი მნიშვნელობა აქვს, როდესაც შეხება რაკეტებთან და ხანგრძლივი დროით ფრენებთან გვაქვს.



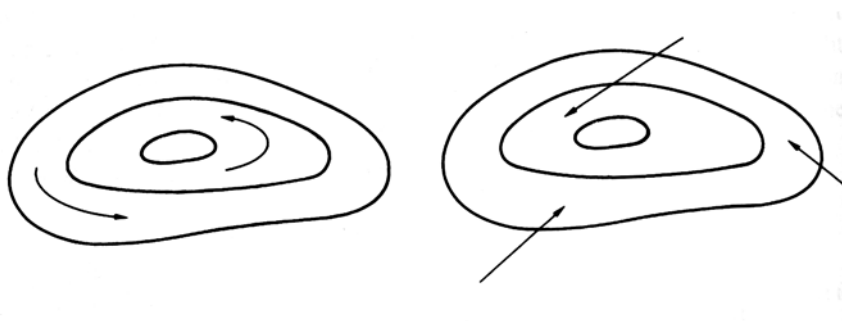
სურ. 4.13. კორიოლისის გადახრის მიმართულება ჩრდილოეთ ნახევარსფეროზე

კორიოლისის ეფექტი მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ოკეანოგრაფიულ და მეტეოროლოგიურ მოვლენებში, როდესაც ნივთიერებების მასები დიდ მანძილებზე გადაადგილდებიან. მაგალითად გამოდგება პასატების ცირკულაციის სახეობა ან გალფის ნაკადის მიმართულება. ამგვარი მოვლენების სრულყოფილი აღწერისთვის რთული ჰიდროდინამიკური ამოცანების ამოხსნაა საჭირო, რომლებშიც კორიოლისის აჩქარება მრავალთაგან ერთ-ერთი წევრია. კორიოლისის ეფექტის ზეგავლენის უკეთ დანახვისთვის ქარის ჰორიზონტალური ცირკულაციის ანუ მეტეოროლოგიური ამოცანის ძალიან გამარტივებული შემთხვევა განვიხილოთ. ერთნაირი ფიზიკური პარამეტრების მქონე ჰაერის მასები მაღალის წნევის რეგიონებიდან დაბალი წნევის რეგიონებისკენ მოძრაობენ. ჰაერის მასების მოძრაობას წნევის გრადიენტის დინება ეწოდება. წნევის გრადიენტს ვერტიკალური მიმართულებით მიზიდულობის ძალები აწონასწორებენ, ჰაერის მასები მხოლოდ ჰორიზონტალურ სიბრტყეში გადაადგილდებიან და სწორედ ეს არის ქარი. წნევის გრადიენტის ძალები საკმაოდ ზომიერებია და მათი შედარება ჩვეულებრივი სიჩქარეებით მოძ-

რავ ჰაერის მასებზე მოქმედ კორიოლისის ეფექტთან დასაშვებია. კორიოლისის ეფექტის არარსებობის პირობებში, ქარის მიმართულება იზობარების პერპენდიკულარული იქნება, როგორც ეს 4.14 სურათზეა გამოსახული. სინამდვილეში, კორიოლისის ეფექტი ქარს მარჯვნივ გადახრის და ეს მანამდე გრძელდება, ვიდრე ქარის ვექტორი იზობარებისადმი პარალელური გახდება, ხოლო კორიოლისის ეფექტი წნევის გრადიენტის ძალის სანი-ნაალმდეგო მიმართულების ხდება და ანონასწორებს მას. ამის შემდეგ ქარი იზობარებისადმი პარალელურად ქრის და ჩრდილოეთ ნახევარსფეროზე დაბალი წნევის ცენტრის გარშემო საათის ისრის სანი-ნაალმდეგო მიმართულებით ცირკულირებს. კორიოლისის ეფექტი სამხრეთ ნახევარსფეროზე საპირისპირო მიმართულებით მოქმედებს და დაბალი წნევის ცენტრის გარშემო ქარის დინება საათის ისრის მიმართულებით ხდება (ამგვარ ქარს **გეოსტროფიული** ეწოდება). ჩვენს მიერ აღწერილ სურათზე ხახუნის ძალა უგულებელვყავით. სინამდვილეში, დედამიწის ზედაპირიდან რამდენიმე კილომეტრის სიმაღლის ქვემოთ ტურბულენტური სიბლანტის ხახუნი მოქმედებს და ქარის მიმართულება იზობარების პარალელური არ არის, როგორც ეს 4.15 სურათზეა გამოსახული.



სურ. 4.14. კორიოლისის ეფექტის შედეგად ქარის გადახრა წნევის გრადიენტის მიმართულებიდან (ჩრდილოეთ ნახევარსფეროზე)



სურ. 4.15. ციკლონური სურათი ჩრდილოეთ ნახევარსფეროზე

კორიოლისის ეფექტის ზეგავლენის კიდევ ერთი კლასიკური მაგალითია თავისუფლად ვარდნილი ნივთიერი წერტილის ვერტიკალური მიმართულებიდან გადახრა. ნივთიერი წერტილის სიჩქარე თითქმის ვერტიკალურია, ხოლო ω ჩრდილოეთ-სამხრეთ ვერტიკალურ სიბრტყეშია, ამიტომ გადამხრელი $2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$ ძალა აღმოსავლეთ-დასავლეთ მიმართულებიდანაა. მაშასადამე, ჩრდილოეთ ნახევარსფეროზე თავისუფლად ვარდნილი სხეული აღმოსავლეთისკენ გადაიხრება. გადახრის გამოთვლა ძალიან გამარტივდება, თუ დედამიწის კოორდინატთა სისტემის Z ღერძს მაღლა მიმართული ვერტიკალის გასწვრივ გავავლებთ. თუ y ღერძი ჩრდილოეთისკენაა მიმართული, ხოლო ატმოსფეროს ხახუნის უგულვებლყოფილია, მაშინ მოძრაობის განტოლება x (აღმოსავლეთ) მიმართულებისთვის იქნება:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})_x \\ &= -2m\omega v_z \sin \theta, \end{aligned} \quad (4.93)$$

სადაც θ არის გეოგრაფიული განედის დანამატია. v_z -ზე მოქმედი კორიოლისის ეფექტი თავისთავად გადახრის ძალიან მცირე შესწორებას იწვევს. აქედან გამომდინარე, 4.93 ფორმულაში შემავალი ვერტიკალური სიჩქარე ისე შეიძლება გამოითვალოს, თითქოს კორიოლისის ეფექტი საერთოდ არ არსებობს:

$$v_z = -gt,$$

$$\text{ამ ფორმულის ინტეგრალი: } t = \sqrt{\frac{2z}{g}}.$$

4.93 ფორმულა ვაინტეგრირებთ და გადახრას შემდეგი სახით მივიღებთ²:

$$x = \frac{\omega g}{3} t^3 \sin \theta \quad \text{ანუ} \quad x = \frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{(2z)^3}{g}} \sin \theta.$$

გადახრის სიდიდის რიგის მისაღებად დავუშვათ, რომ $\theta = \pi/2$ (ეკვატორი) და $z = 100\text{მ}$. ამ შემთხვევაში გადახრა იქნება: $x \approx 2.2\text{სმ}$.

რეალური ექსპერიმენტის ჩატარება საკმაოდ რთულია, ვინაიდან მცირე გადახრას ქარი, სიბლანტე ან რაიმე სხვა ფაქტორი ხშირად ფარავს.³

უფრო კარგად აღსაქმელი ექსპერიმენტის ჩატარება ფუკოს ქანქარაზე შეიძლება. თუ ქანქარა ჩრდილოეთ პოლუსზე სივრცის მოცემულ სიბრტყეში ირხევა, სიბრტყისადმი პერპენდიკულარული მისი წრფივი იმპულსი ნულის ტოლია, ქანქარა უცვლელ სიბრტყეში რხევას განაგრძობს, ხოლო მის ქვემოთ დედამიწა ბრუნავს. დედამიწაზე მყოფი დამკვირვებლის თვალთახედვით, რხევის სიბრტყე დღეში ერთხელ ბრუნდება. განსხვავებულ სიმაღლეებზე შედეგი სხვაგვარია, მაგრამ მოვლენა ხარისხობრივად იგივეა და დეტალური გამოთვლები სავარჯიშოებისთვის მოვიტოვოთ.

2 ატმოსფეროს ხახუნის ძალას კვლავ უგულვებლყოფთ

3 4.93 ფორმულით იოლად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ მაღლა ასროლილი საგანი მიწაზე გასროლის ადგილიდან დასავლეთისკენ დაეცემა.

კორიოლისის ეფექტი ატომურ ფიზიკაშიც არსებობს. მრავალატომიან მოლეკულაში ორი ტიპის მოძრაობა ხდება: მოლეკულა მთლიანი მყარი სხეულის სახით **ბრუნავს** და ატომები ნონასწორული მდებარეობების გარშემო **ვიბრირებენ**. ატომები ვიბრაციის შედეგად მოლეკულის მბრუნავი კოორდინატთა სისტემისადმი მოძრაობენ. კორიოლისის წევრი ნულისგან განსხვავდება და ატომებს საწყისი რხევებისადმი პერპენდიკულარული მიმართულებით მოძრაობას აიძულებს. კორიოლისის ეფექტებით გამონეული მოლეკულის სპექტრის შეშფოთებები ბრუნვითი და ვიბრაციული მოძრაობების ურთიერთქმედების შედეგია.

დაამტკიცებენ

1. დაამტკიცეთ, რომ მატრიცების გამრავლება ასოციატიურია და ორი ორთოგონალური მატრიცის ნამრავლი ასევე ორთოგონალურია.

2. დაამტკიცეთ, რომ ტრანსპონირებულ და შეუღლებულ მატრიცებს შემდეგი თვისებები აქვთ:

$$\overline{AB} = \overline{B}^T \overline{A}^T, \quad (AB)^{\dagger} = B^{\dagger} A^{\dagger}.$$

3. დაამტკიცეთ, რომ მსგავსების გარდაქმნისას მატრიცის კვალი უცვლელია, ხოლო ორთოგონალური მსგავსების გარდაქმნისას მატრიცა ანტისიმეტრიულობას ინარჩუნებს.

4. 3×3 განზომილების ნამდვილი \mathbf{A} მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები გამოიკვლიეთ და დაამტკიცეთ, რომ $\mathbf{1} \pm \mathbf{A}$ არაგანსაკუთრებულია.

ბ) დაამტკიცეთ, რომ იგივე პირობებში შემდეგი მატრიცა ორთოგონალურია:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{1} + \mathbf{A})(\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$$

5. კომპონენტების ბრუნვის მატრიცების თანმიმდევრობით გამრავლების შედეგად ზოგადი ბრუნვის მატრიცის ელემენტები ეილერის კუთხეების საშუალებით გამოსახეთ. შეამოწმეთ აკმაყოფილებენ თუ არა მატრიცული ელემენტები ორთოგონალურობის პირობებს.

6. სხეულის ღერძთა სიმრავლე სივრცის ღერძთა სიმრავლეს ეილერის კუთხეების საშუალებით უკავშირდება, როდესაც შემდეგი ბრუნვები ხდება:

- ა) x ღერძის გარშემო θ კუთხით შემობრუნება
- ბ) z' ღერძის გარშემო ψ კუთხით შემობრუნება
- გ) ძველი z ღერძის გარშემო ϕ შემობრუნება

დაამტკიცეთ, რომ ბრუნვების ამგვარი თანმიმდევრობის პირობებში გარდაქმნის მატრიცას იგივე ელემენტები ექნება, რაც სახელმძღვანელოში მოყვანილი თანმიმდევრობის დროს ჰქონდა (**მინიშნება**: ბრუნვის მატრიცების გამრავლება აუცილებელი არ არის).

7. **A** მატრიცა ნებისმიერი ღერძის გარშემო 180° -ით ბრუნვისაა. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\mathbf{P}_\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \mathbf{A})$, მაშინ $\mathbf{P}_\pm^2 = \mathbf{P}_\pm$. \mathbf{P}_\pm -ის ელემენტები ნებისმიერ სისტემაში მიიღეთ და **F** ვექტორზე მოქმედი \mathbf{P}_+ და \mathbf{P}_- ოპერაციების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია წარმოადგინეთ.

8. ა) დაამტკიცეთ, რომ 4.47' ფორმულით მოცემულ ბრუნვის მატრიცას **S** ინვერსიული გარდაქმნის მატრიცის სახით ვერ წარმოვადგენთ.

ბ) პირდაპირი გამრავლების საშუალებით შეამოწმეთ არის თუ არა 4.47' ფორმულით მოცემული მატრიცა ორთოგონალური.

9. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ბრუნვის წარმოდგენა ორ სიბრტყეში მომხდარი არეკვლებით შეიძლება, როდესაც ორივე სიბრტყე ბრუნვის ღერძზე გადის და მათ შორის კუთხეა $\Phi/2$.

10. თუ **B** კვადრატული მატრიცაა და **A** მისი ექსპონენციალური ფუნქციაა, რომელიც გაშლის უსასრულო რიგით განისაზღვრება:

$$\mathbf{A} \equiv e^{\mathbf{B}} = \mathbf{1} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \dots + \frac{\mathbf{B}^n}{n!} + \dots,$$

მაშინ დაამტკიცეთ:

ა) როდესაც **B** და **C** კომუტირებენ, $e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{C}} = e^{\mathbf{B}+\mathbf{C}}$, ბ) $\mathbf{A}^{-1} = e^{-\mathbf{B}}$

გ) $e^{\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$, დ) **A** ორთოგონალურია, თუ **B** ანტისიმეტრიულია

11. ქვემოთ მოყვანილი ფორმულა $n \times n$ განზომილების **B** მატრიცის დეტერმინანტისთვის შეამოწმეთ:

$$|-\mathbf{B}| = (-1)^n |\mathbf{B}|$$

12. ღერძთა სიმრავლეში, როდესაც Z ღერძი სასრული ბრუნვის ღერძია, ბრუნვის მატრიცა 4.43 ფორმულით მოიცემა და ϕ კუთხე სასრული ბრუნვის Φ კუთხით იცვლება. ბრუნვის 4.62 ფორმულა ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაზე გარდაქმნის შედეგად მიიღეთ, როდესაც გარდაქმნის ორთოგონალური მატრიცა გამოსახულია სასრული ბრუნვის ღერძის მიმმართველი კოსინუსების საშუალებით.

13. ა) დავუშვათ, კოორდინატთა ბრუნვა Φ_1 და Φ_2 კუთხეებით ხდება და ეს ბრუნვა Φ კუთხით ბრუნვის ექვივალენტურია. დაამტკიცეთ, რომ Φ_1 , Φ_2 და Φ სფერული სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო Φ -ს მოპირდაპირე კუთხე ბრუნვის ღერძებს შორის კუთხეა.

ბ) დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ღერძის გარშემო ბრუნვა ორი 180° -იანი შემობრუნების შედეგად შეგვიძლია მივიღოთ.

14. ა) შეამონმეთ აკმაყოფილებს თუ არა გადანაცვლების სიმბოლო

კრონეკერის დელტა-სიმბოლოებით მოცემულ ტოლობას:

$$\epsilon_{ijp}\epsilon_{rmp} = \delta_{ir}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jr}.$$

ბ) დაამტკიცეთ, რომ: $\epsilon_{ijp}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{pk}$.

15. დაამტკიცეთ, რომ კუთხური სიჩქარის კომპონენტები სივრცის ღერძების სიმრავლის გასწვრივ ეილერის კუთხეების საშუალებით ასე გამოისახებიან:

$$\omega_x = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi,$$

$$\omega_y = \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi,$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}.$$

16. დაამტკიცეთ, რომ ეილერის e_0 პარამეტრის მოძრაობის განტოლებაა:

$$-2\dot{e}_0 = e_1\omega_x + e_2\omega_y + e_3\omega_z,$$

სადაც შტრიხები სხეულის ღერძთა სიმრავლეს აღნიშნავენ. ეილერის დარჩენილი სამი პარამეტრის და კელი-კლაინის α და β კომპლექსური პარამეტრების განტოლებებიც მიიღეთ.

17. დაამტკიცეთ, რომ უსასრულოდ მცირე ბრუნვის \mathbf{M}_i მატრიცები შემდეგ კომუტაციურ ფორმულას აკმაყოფილებენ:

$$[\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk}\mathbf{M}_k.$$

18. ა) ვექტორული განტოლება სიბრტყეში \mathbf{r} -ის არეკვლისთვის მიიღეთ, როდესაც სიბრტყისადმი პერპენდიკულარული ერთეულოვანი ვექტორია \mathbf{n} .

ბ) დაამტკიცეთ, რომ თუ $l_i, i = 1, 2, 3$ \mathbf{n} -ის მიმართველი კოსინუსებია, მაშინ გარდაქმნის მატრიცის ელემენტებია: $A_{ij} = \delta_{ij} - 2l_i l_j$,

ასევე შეამონმეთ არის თუ არა \mathbf{A} არასაკუთრივი ორთოგონალური მატრიცა.

19. 4.9 და 4.10 სურათზე ჩანს, რომ სასრული ბრუნვების განსხვავებული თანმიმდევრობები სხვადასხვა შედეგებს იწვევენ. გამოიყენეთ $\mathbf{A}(\alpha, 1_n)$ აღნიშვნა, სადაც \mathbf{A} არის 1_n -ის მიმართულებით α კუთხით ბრუნვა. n_1 და n_2 ორთოგონალური მიმართულებებია.

ა) \mathbf{x} არის მყარი სხეულის წერტილის მდებარეობის ვექტორი და სხეული ათვლის სათავის გარშემო θ კუთხით ბრუნდება. დაამტკიცეთ, რომ \mathbf{x} -ის ახალი მნიშვნელობაა: $\mathbf{x}' = (1_n \cdot \mathbf{x})1_n + [\mathbf{x} - 1_n(1_n \cdot \mathbf{x})]\cos \theta - 1_n \times \mathbf{x} \sin \theta$.

ამ ფორმულიდან $\mathbf{A}(\pi/2, 1_n)$ -სთვის განკუთვნილი ფორმულა და სურათზე გამოსახული ორი ბრუნვა მიიღეთ.

ბ) აღწერეთ ეს ორი ბრუნვა (**მინიშნება**: პასუხი $(1/\sqrt{3}) (1,1,1)$ მიმართულებით $\frac{2}{3}\pi$ კუთხით შემობრუნებას მოიცავს).

20. სიბრტყის ზედაპირზე მდებარე სფეროს „გორვის“ შეზღუდვა ეილერის კუთხეების საშუალებით გამოსახეთ. დაამტკიცეთ, რომ პირობები არაინტეგრებადებია და მაშასადამე შეზღუდვა არაჰოლონომიურია.

სავარჯიშოები

21. ნივთიერი ნერტილი ვერტიკალურად მალლა u_0 საწყისი სიჩქარით აისროლეს. ნივთიერმა ნერტილმა მაქსიმალურ სიმაღლეს მიაღწია და მიწაზე ეცემა. დაამტკიცეთ, რომ მიწაზე დაცემისას კორიოლისის გადახრა მაქსიმალური სიმაღლიდან თავისუფალი ვარდნის შემთხვევასთან შედარებით საპირისპირო მიმართულების და ოთხჯერ მეტი სიდიდისაა.

22. საგანი დედამიწის ზედაპირის გასწვრივ ჰორიზონტალურად ისროლეს. დაამტკიცეთ, რომ კორიოლისის ეფექტით გამოწვეული გადახრა პირველ მიახლოებაში დროში წრფივად იცვლება შემდეგი სიჩქარით: $\omega \cos \theta$,

სადაც ω არის დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიხშირე, ხოლო θ - გეოგრაფიული განედის დანამატია. ჩრდილოეთ ნახევარსფეროზე გადახრა მარჯვენისკენ ხდება.

23. ფუკოს ქანქარა მბრუნავი დედამიწის ზედაპირის რომელიმე ნერტილში მოძრაობს და მისი იმპულსი ქანქარის ბალანსირის და დაკიდების ნერტილის მომცველ ვერტიკალურ სიბრტყეში მდებარეობს. დაამტკიცეთ, რომ ქანქარის მოძრაობის აღწერა შესაძლებელია შემდეგი ფრაზით: რხევის სიბრტყე დღეში $2\pi \cos \theta$ რადიანი თანაბრად ბრუნავს, სადაც θ გეოგრაფიული განედის დანამატია (გეოგრაფიული განედისა და 90 გრადუსის სხვაობა). რა მიმართულებით ხდება ბრუნვა?

24. ვაგონეტის მანებიანი ბორბალი ვერტიკალურ ღერძზეა დამაგრებული და ჰორიზონტალურ სიბრტყეში თავისუფლად ბრუნავს. ბორბლის კუთხური სიჩქარეა $\omega = 3.0$ რადიანი/წმ. შემდეგ პატარა მწერი ბორბლის ერთ-ერთ მანაზე ჯდება და $0,5$ მ/წმ სიჩქარით მოძრაობს. მანის ხახუნის კოეფიციენტი $\mu = 0.30$. რა მანძილს გაივლის მანაზე მწერი სრიალის დაწყებამდე?

25. კარუსელი მოძრაობას იწყებს და $0,02$ ბრ/წმ² თანაბარი კუთხური აჩქარება აქვს. ცენტრიდან 7 მ-ით დაშორებულ სკამზე მჯდომ გოგონას 3 კგ მასის ბურთი უჭირავს. გამოთვალეთ გოგონას ძალის სიდიდე და მიმართულება, რათა მან კარუსელის მოძრაობის დაწყებიდან 6 წამის განმავლობაში ბურთის დაჭერა შეძლოს. ძალის მიმართულება ბრუნვის ცენტრიდან გოგონამდე გავლებულის წრფის მიმართ განსაზღვრეთ.